Problème

Soit $(G, .)$ un groupe cyclique de neutre 1 et de cardinal n.
Soit a un générateur de G.

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$.
   Montrer que
   $$G =< a^k > \Leftrightarrow \ k \wedge n = 1$$

2) En déduire que le nombre de générateurs du groupe G est égal à $\varphi(n)$.

3) Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $d \mid n$.
   Montrer que $O(a^{\frac{n}{d}}) = d$.
   Préciser le cardinal du sous-groupe $< a^{\frac{n}{d}} >$.

4) Soient maintenant $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $d \mid n$, et H un sous-groupe de G de cardinal d.
   i) Montrer que si $a^k \in H$, alors $\frac{n}{d} \mid k$.
   ii) En déduire que $H \subset \left\langle a^{\frac{n}{d}} \right\rangle$, puis que $H = \left\langle a^{\frac{n}{d}} \right\rangle$.

5) Déduire de ce qui précède que pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $d \mid n$, G admet un unique sous-groupe de cardinal d.

6) Déduire de ce qui précède la fameuse égalité $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.