CONCOURS NATIONAL MAROCAIN 2022-MATHS I-MP

EXERCICE

Calcul d'intégrales
Noté sur 4 points sur 20

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \,]-1,1]$. On considère le polynôme $P_\lambda = X^2 + 2\lambda X + 1 \in \mathbb{C}[X]$, et on définit la fonction de la variable réelle F_λ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda + \cos x}$$

0.1. Étude des racines du polynôme P_λ.
On note z_1 et z_2 les racines complexes du polynôme P_λ et on suppose que $|z_1| \leqslant |z_2|$.
0.1.1. Préciser les valeurs de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$.
0.1.2. On suppose que $|z_1| = 1$ et on choisit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = e^{i\theta}$. Justifier que $z_2 = e^{-i\theta}$ puis trouver une contradiction.
0.1.3. Montrer que $0 < |z_1| < 1 < |z_2|$.
0.2. Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{P_\lambda}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.
0.3. Développement de la fonction F_λ en série trigonométrique.
0.3.1. Vérifier que pour tout réel $x, F_\lambda(x) = \frac{2e^{ix}}{P_\lambda(e^{ix})}$.
0.3.2. Montrer que pour tout réel $x, F_\lambda(x) = \frac{2}{z_1 - z_2}\left(\frac{1}{1-e^{-ix}z_1} + \frac{z_1 e^{ix}}{1-e^{ix}z_1}\right)$.
0.3.3. Justifier que, pour tout réel x, la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_1^n \cos(nx)$ est convergente et que

$$F_\lambda(x) = \frac{2}{z_1 - z_2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z_1^n \cos(nx)\right)$$

0.4. Application au calcul d'intégrales
On considère la suite de fonctions $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad w_n(x) = z_1^n \cos(nx)$$

0.4.1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
0.4.2. En déduire les valeurs des intégrales $\int\limits_0^\pi \frac{\cos(pt)}{\lambda + \cos t}dt$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.
0.5. Donner en particulier les valeurs des intégrales $\int\limits_0^\pi \frac{\cos(nt)}{2+\cos t}dt$ et $\int\limits_0^\pi \frac{\cos(nt)}{\cos t + \cosh a}dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $a > 0$, où cosh désigne la fonction cosinus hyperbolique.

PROBLÈME

Étude d'une série entière

Pour tout $(\alpha, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, on pose $\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = 1$ si $n = 0$, et $\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ si $n \geqslant 1$.
On considère la suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ n \end{pmatrix} dt$$

Le problème a pour objectif de déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$, puis de calculer sa somme sur son intervalle ouvert de convergence et en fin d'étudier son comportement aux bornes de cet intervalle.

Partie 1

Quelques résultats préliminaires

1.1. Une inégalité utile
Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\varphi'' \leqslant 0$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.
1.1.1. Montrer que, pour tout $t \in [0,1], \varphi(t) = t\varphi'(0) + \int_0^t (t-s)\varphi''(s)ds.$
1.1.2. En déduire que $\varphi'(0) = -\int_0^1 (1-s)\varphi''(s)$ ds.
1.1.3. Montrer que, pour tout $t \in [0,1], \varphi(t) = -\int_0^1 (\min(s,t) - st)\varphi''(s)ds.$
1.1.4. Montrer que, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2, 0 \leqslant \min(s,t) - st \leqslant \frac{1}{4}$, puis en déduire que

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{\varphi'(0) - \varphi'(1)}{4}.$$

1.2. Etude de la convergence d'une intégrale et d'une série numérique.
1.2.1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\ln^2 t}$ est intégrable sur l'intervalle $[2, +\infty[$ et calculer $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^2 t}$ dt.
1.2.2. En déduire que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2 n}$ est convergente.
1.3. Formule du binôme généralisée
Si N est un entier naturel et x un nombre réel, alors

$$(1+x)^N = \sum_{n=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} x^n$$

C'est la formule du binôme de Newton.
L'objectif de cette section est d'établir une généralisation de cette formule au cas où N est remplacé par un réel qui n'est pas un entier naturel.
Pour cela, on considère un nombre réel α, qui n'est pas un entier naturel, et on note f_α la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$\forall x > -1, \quad f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha.$$

1.3.1. Vérifier que la fonction f_α est solution sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(1+x)y' - \alpha y = 0$$

1.3.2. On se propose dans cette sous section de chercher les solutions de l'équation différentielle (1) qui sont développables en série entière au voisinage de l'origine. Pour cela, on considère une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme est note $\psi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution (1) sur l'intervalle $]-r, r[$, avec $r = \min(R, 1)$.

(i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} = (n - \alpha)a_n$.

(ii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} a_0$.

(iii) Calculer le rayon de convergence ρ de la série entière ainsi obtenue lorsque $a_0 = 1$, puis vérifier que sa somme est bien solution de (1) sur l'intervalle $]-\rho, \rho[$.

1.3.3. Montrer soigneusement que pour tout $x \in]-1, 1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n$.

Partie 2

Calcul du rayon de convergence et de la somme de la série entière en question

On rappelle que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par :

$$b_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 t(t-1)\cdots(t-n+1)dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ n \end{pmatrix} dt.$$

2.1. Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$ et tout entier naturel $n, \left| \begin{pmatrix} t \\ n \end{pmatrix} \right| \leqslant 1$.

2.2. En déduire que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ vérifie $R_1 \geqslant 1$.

2.3. Soit $x \in]-1, 1[$, On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur le segment $[0, 1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \quad u_n(t) = \begin{pmatrix} t \\ n \end{pmatrix} x^n.$$

2.3.1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge normalement sur le segment $[0, 1]$.

2.3.2. En déduire que

$$\forall x \in]-1.1[, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \int_0^1 (1+x)^t dt = \frac{x}{\ln(1+x)}$$

2.4. On cherche ici à montrer que le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} b_n x^n$ vaut 1. Raisonnement par l'absurde, on suppose que $R_1 > 1$ et on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, x \in]-R_1, R_1[$.

2.4.1 Soit $x \in]0, 2[$. Justifier que $f(x-1) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{-1}{\ln x}$.

2.4.2 Trouver une contradiction et conclure.

Partie 3

Étude du comportement de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note h_n la fonction définie sur le segment $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1], h_n(t) = t \ln n + \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{t}{k}\right)$$

3.1. Étude de la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 2}$

On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ de fonctions définies sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall n \geqslant 2, \forall t \in [0,1], \quad v_n(t) = \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) - t\ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

3.1.1. Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1], h_n(t) = \sum\limits_{k=2}^{n} v_k(t)$.

3.1.2. En utilisant le résultat de la section 1.1. de la première partie, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1], 0 \leqslant v_n(t) \leqslant \frac{1}{4(n-1)} - \frac{1}{4n}$.

3.1.3. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} v_n$ converge normalement sur le segment $[0,1]$.

3.1.4. Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\geqslant 2}$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers une fonction noté h, puis justifier que h est continue sur le segment $[0,1]$.

3.2. Recherche d'un équivalent de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3.2.1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, b_n = (-1)^{\mathrm{n}-1}|b_n|$.

3.2.2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2, (n+1)|b_{n+1}| = \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h_n(t)}\mathrm{d}t$

3.2.3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $t \in [0,1], 0 \leq h(t) - h_n(t) \leqslant \frac{1}{4n}$.

3.2.4. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'encadrement

$$e^{-\frac{1}{4n}} \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}dt \leqslant (n+1)|b_{n+1}| \leqslant \int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}dt.$$

3.2.5. Montrer que. pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\int_0^1 t(1-t)e^{-t\ln n}e^{h(t)}dt = \frac{1}{\ln^2 n}\int_0^{\ln n} se^{-s}\left(1-\frac{s}{\ln n}\right)e^{h\left(\frac{s}{\ln n}\right)}ds$$

3.2.6. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$, par :

$$\forall t \geqslant 0, g(t) = (1-t)e^{h(t)} \text{ si } t \in [0,1] \text{ et } g(t) = 0 \text{ si } t > 1$$

.

(i) Justifier que g est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

(ii) Montrer, en vérifiant soigneusement les hypothèses du théorème utilisé que la suite $\left(\int_0^{+\infty} se^{-s}g\left(\frac{s}{\ln n}\right)ds\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

(iii) Déduire de ee qui précède que $|b_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln^2 n}$ et que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}}{n\ln^2 n}$.

3.3. Retour à l'étude de la série entière aux bornes de son intervalle de convergence.

3.3.1. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$, de la variable réelle x, converge normalement sur le segment $[-1,1]$.

On note encore f la somme de cette série sur le segment $[-1,1]$:

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

3.3.2. Justifier que pour tout $x \in]-1,1], f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}$

3.3.3. Justifier la convergence de la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n b_n$ et calculer sa somme.

FIN DE L'EPREUVE