Problème 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, on appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X à valeurs dans N, lorsqu'elle existe, la fonction G_X définie par : $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X = k)$.

Partie I : Quelques propriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. On a $\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$, donc $R = R_{cv}(\sum_{k\geq 0} t^k P(X = k)) \geq 1$ puis sa somme G_X est au moins définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.
2. La somme G_X est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ avec
$$\forall k \in \mathbb{N} \ , \ \forall x \in]-R, R[\ , \ G_X^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{i!}{(i-k)!} t^{i-k} P(X = i)$$
En particulier, pour $k \in \mathbb{N}$, $G_X^{(k)}(0) = k!P(X = k)$.
3. (a) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, alors $G_X(t) = 1 - p + pt$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $G_X(t) = (1 - p + pt)^n$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (c) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$, pour tout $|t| < \frac{1}{1-p}$.
4. Comme $R \geq 1$ alors G_X est continue sur $[-1, 1]$ et de classe C^∞ sur $]-1, 1[$. La restriction de sa dérivée seconde sur $[0, 1[$ est positive, ce qui implique que G'_X est croissante et sa limite en 1^- existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ (Théorème de la limite monotone). Notons cette limite par l.
   • Si $l \in \mathbb{R}$ alors G_X est dérivable en 1 (prolongement dérivable) avec $G'_X(1) = l$.
   Pour $0 \leq x < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} P(X = k) \leq G'_X(x) \leq G'_X(1)$ (G'_X est $\nearrow$)
   La suite $(\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} P(X = k))_n$ est $\nearrow$ et majorée donc elle converge. La convergence de cette suite assure la convergence normale (puis uniforme) de la série
   $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} P(X = n)$ sur $[0, 1]$. En permutant les signes $\int$ et $\sum$, on obtient :
$$G'_X(1) = \lim_{t\to 1^-} G'_X(t) = \lim_{t\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = E(X)$$
   • Si $l = +\infty$, on considère un réel $A > 0$ quelconque. Par définition de la limite, il existe un $0 < x < 1$ assez proche de 1 tel que $G'_X(x) > A$ comme $G'_X(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} P(X = k)$, alors, à partir d'un certain rang N, on a $\sum_{k=1}^{n} kP(X = k) \geq \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} P(X = k) > A$, ceci pour tout $A > 0$ d'où $E(X) = +\infty$.

5. Supposons que la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2.
En particulier $E(X)$ est finie donc G'_X est de classe C^1 (en fait le théorème de prolongement dérivable nous donne que la fonction est de classe C^1 au point de prolongement) .
Pour $0 < x < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{G'_X(x) - G'_X(1)}{x-1} &= \frac{1}{x-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}P(X=k) - \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k)\right) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k\frac{x^{k-1}-1}{x-1}P(X=k) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k)
\end{aligned}$$

Puisque $\forall n \geq 2 \quad , \quad |k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k)| \leq k(k-1)P(X=k)$
et $\sum_{k\geq 2} k(k-1)P(X=k)$ est convergente de somme $E(X(X-1))$,
alors la série $\sum_{k\geq 2} k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k)$ converge normalement sur $[0,1]$
puis

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{G'_X(x)-G'_X(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=2}^{\infty} k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)P(X=k) = E(X(X-1))$$

On en déduit que G'_X est dérivable en 1 et que

$$V(X) = E(X(X-1)) - E(X)^2 + E(X) = G''_X(1) - (G'_X(1))^2 + G'_X(1)$$

Réciproquement, si G_X est supposée deux fois dérivable en 1, sa première dérivabilité première, nous donne que G'_X est continune sur $[0,1]$, elle est déjà dérivable sur $[0,1[$, donc par $T.A.F$:

$$\forall x \in]0,1[\ , \qquad \frac{G'_X(x)-G'_X(1)}{x-1} = \sum_{k=2}^{\infty} k\frac{x^{k-1}-1}{x-1}P(X=k)\sum_{k=2}^{\infty} k(1+x+...+x^{k-2})P(X=k)$$

et et Fixons un entier $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X=k) = \lim_{t\to 1^-} \sum_{k=2}^{n} k(k-1)t^{k-2}P(X=k) \leq \lim_{t\to 1^-} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)t^{k-2}P(X=k) = G''_X(1)$$

Ceci pour tout $n \geq 2$, d'où l'existence de $E(X(X-1))$, puis $E(X^2)$.

6. Si $0 < p < 1$ alors $\frac{1}{1-p} > 1$ puis G_X admet un moment d'ordre 2. Comme

$$G'_X(t) = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2} \quad , \quad G''_X(t) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^3}$$

alors $\qquad E(X) = \frac{1}{p}$ et $\frac{1-p}{p^2}$.

Partie II : La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

1. Soit $|t| < R$ avec R est le plus petit des rayons de convergence de touts les séries entières dont les sommes seront $G_{X_1}, ..., G_{X_k}$ et $G_{X_1+...+X_k}$.
   Comme $X_1, ..., X_k$ sont indépendantes alors les variables $t^{X_1}, ..., t^{X_k}$ le sont aussi (indépendances héritées) puis

$$G_{X_1+...+X_k}(t) = E(t^{X_1+...+X_k}) = E(\prod_{i=1}^{k} t^{X_i}) = \prod_{i=1}^{k} E(t^{X_i}) = \prod_{i=1}^{k} G(X_i)$$

   Les X_i ont la même loi que X, donc $G_{X_1+...+X_k} = \prod_{i=1}^{k} G(X_i) = G_X^k$.

2. (a) On a : $\quad E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y)$ et par probabilités totales, on a :

$$\forall y \in Y(\Omega) \ , \ P(Y = y) = \sum_{k=1}^{n} P(Y = y, N = k) = \sum_{k=1}^{n} P(Y = y|N = k)P(N = k)$$

   on peut permuter les $\sum$ qui sont finis pour avoir :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k) \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y|N = k) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k)E(Y|[N = k])$$

   (b) Soient $k \in [|1, n|]$ et $t \in \mathbb{R}$. On pose $Y = t^S$, on a :

$$\begin{aligned}
E(t^S|[N = k]) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y|N = k) \\
&= \sum_{s \in S(\Omega)} t^s P(S = s|N = k) \\
&= \sum_{s \in (\sum_{i=1}^{k} X_i)(\Omega)} t^s P(S = \sum_{i=1}^{k} X_i = s) \\
&= G_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t) \\
&= G_X^k(t)
\end{aligned}$$

(c) Pour tout réel t , $G_S(t) = E(t^S) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k)E(Y|[N = k]) = \sum_{k=1}^{n} P(N = k)G_X^k(t)$.

(d) Pour tout réel t ,
$G_N(G_X(t)) = \sum_{k=1}^{n}(G_X(t))^k P(N = k) = G_S(t)$, d'où $G_S = G_N \circ G_X$.

3. Les fonctions polynomiales sont dérivables, donc, pour tout réel t , $G'_S(t) = G'_N(G_X(t)).G'_X(t)$, en prenant $t = 1$ et utilisant $Q.I.4$, on obtient $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III : Application

1. (a) Le jeton est non truqué donc $P(N = 1) = P(N = 2) = 0,5$.

(b) • $k = 1$: Dans ce cas, on lance le dé une seule fois donc les événements sont équiprobables :

$$\forall i = 1, ..., 4 \ , \ P(S = i \mid N = 1) = 0,25$$

• $k = 2$: Dans ce cas, on lance le dé deux fois, donc $S = X_1 + X_2$, par indépendance de X_1 et X_2, on aura, pour tout $i = 2, ..., 8$:

$$P(S = i \mid N = 2) = \sum_{\substack{1 \leq j,l \leq 4 \\ j+l=i}} P(X_1 = j)P(X_2 = l) = \sum_{\substack{1 \leq j,l \leq 4 \\ j+l=i}} \frac{1}{16} = \frac{\min(i-1, 9-i)}{16}$$

(c) Par probabilités totales, on a :

$$\forall i = 1, ..., 8 \ , \ P(S = i) = P(S = i \mid N = 1)P(N = 1) + P(S = i \mid N = 2)P(N = 2)$$

En utilisant les calculs précédents, on obtient :

$$P(S = 1) = \tfrac{4}{32} \ , \ P(S = 2) = \tfrac{5}{32} \ , \ P(S = 3) = \tfrac{6}{32} \ , \ P(S = 4) = \tfrac{7}{32}$$
$$P(S = 5) = \tfrac{4}{32} \ , \ P(S = 6) = \tfrac{3}{32} \ , \ P(S = 7) = \tfrac{2}{32} \ , \ P(S = 8) = \tfrac{1}{32}$$

L'espérance de S est donnée par :

$$E(S) = \sum_{i=1}^{8} iP(S = i) = \frac{15}{4}$$

fin

Le moment d'ordre 3 de S est donnée par :

$$E(S^2) = \sum_{i=1}^{8} i^2 P(S=i) = \frac{35}{2}$$

D'où $\quad V(S) = E(S^2) - E(S)^2 = \frac{55}{16}$.

2. (a) On prend $\quad X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,2,3,4\})$.

   (b) Pour tout réel t, on a :

$$G_N(t) = \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} \quad , \quad G_X(t) = \frac{t}{4} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{2}$$

   (c) Pour tout réel t, on a :

$$G_S(t) = G_N(G_X(t)) = \frac{t}{8} + \frac{5t^2}{32} + \frac{3t^3}{16} + \frac{7t^4}{32} + \frac{t^5}{8} + \frac{3t^6}{32} + \frac{t^7}{16} + \frac{t^8}{32}$$

   On retrouve la loi, l'espérance et la variance de S, en utilisant les relations :

$$P(S=i) = \frac{G_S^{(i)}(0)}{i!} \quad , \quad E(S) = G'_S(1) \quad , \quad V(S) = G''_S(1) + G'_S(1) - G'_S(1)^2$$

Pour vos remarques , merci de me contacter sur

taoufiki–maths@hotmail.fr