المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur de la Recherche
Scientifique de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Nationale Supérieure des Mines de Rabat

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission aux Établissements de Formation d'Ingénieurs et
et Établissements Assimilés

Session 2016

ÉPREUVE DES MATHÉMATIQUES I

Filière MP

Durée 4 heures

cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de tout matériel électronique, y compris la calculatrice, est interdit.

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet de cette épreuve est composé de deux problèmes indépendants entre eux.

Durée : 4 heures

Problème 1

Soit n un entier naturel, on note $[\![0, n]\!] = \{0, ..., n\}$, on appelle polynômes de Bernstein de degré n les polynômes réels $B_{n,k} = \complement_n^k X^k (1-X)^{n-k}$, $k \in [\![0, n]\!]$. Dans ce problème, on voudrait démontrer le théorème de Weierstrass par deux méthodes et donner quelques applications de ce théorème. Dans toute la suite, on identifie polynôme et fonction polynomiale associée.

Partie I

Théorème de Weierstrass

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(f)$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par,

$$\forall x \in [0,1], \quad P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x).$$

1. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$.

(b) En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\quad 0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k B_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) B_{n,k}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$, (on étudiera les trois cas : ($k \neq 0$ et $k \neq n$), ($k = 0$) puis ($k = n$)).

(b) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$, $(P_n(f))'(x) = n \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n-1,k}(x)$.

(c) En déduire que si f est croissante sur $[0, 1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $P_n(f)$ est croissante sur $[0, 1]$.

4. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.

(a) Pour tout $x \in [0, 1]$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$,

$$|y - x| \leq \alpha \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(On vous demande de redémontrer le théorème de Heine pour l'application f continue sur le segment $[0, 1]$).

(c) Soit $x \in [0, 1]$, on pose $A = \{k \in [\![0, n]\!], \quad \left|x - \dfrac{k}{n}\right| \leq \alpha\}$ et $B = \{k \in [\![0, n]\!], \quad \left|x - \dfrac{k}{n}\right| > \alpha\}$.

i. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

ii. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\in A}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k}(x)\leq\frac{2M}{n\alpha^2}x(1-x)\leq\frac{M}{2n\alpha^2}$, avec $M=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

(d) En déduire que, pour tout $x\in[0,1]$, $|P_n(f)(x)-f(x)|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{M}{2n\alpha^2}$, avec $M=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

(e) En déduire que la suite $(P_n(f))_{n\geq1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5. Plus généralement, soit $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(Q_n(g))_n$ qui converge uniformément vers g sur $[a,b]$.

Partie II
Une démonstration probabiliste du théorème de Stone-Weierstrass

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x, $x\in[0,1]$, on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n=\dfrac{S_n}{n}$.

(a) Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n.

(b) Justifier que, pour tout $\delta>0$, $P(|X_n-x|\geq\delta)\leq\dfrac{1}{4n\delta^2}$.

2. On introduit la variable aléatoire $Y_n=f(X_n)$ et on pose pour tout $x\in[0,1]$, $C_n(f)(x)=E(Y_n)$. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon>0$.

(a) Vérifier que $x\mapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0,1]$.

(b) D'après le théorème de Heine, comme f est continue sur $[0,1]$, alors il existe $\beta>0$ tel que, pour tout $(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1]$, $|x_1-x_2|\leq\beta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$. (On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat).

i. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leq\beta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

ii. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)\right|\leq\frac{M}{2n\beta^2}$, avec $M=\sup\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

(c) En déduire que la suite $(C_n(f))_{n\geq1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Partie III
Applications

Dans toute la suite de ce problème, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$, on pose $I=[a,b]$.

1. Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue, on suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^nf(x)\mathrm{d}x=0.$$

(a) Montrer que la fonction f est nulle sur I.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^ne^{-(1-i)x}\mathrm{d}x$.

(c) En déduire qu'il existe une fonction réelle ϕ, continue sur $[0,+\infty[$ et non nulle, telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^n\phi(x)\mathrm{d}x=0$.

2. Soit $g:I\to\mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t=0$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, $\displaystyle\int_a^b P_n(t)\mathrm{d}t=0$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]}|g(t)-P_n(t)|\right)=0$.

3. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{t\in[a,b]}|\varphi(t)-P_n(t)|\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{t\in[a,b]}|\varphi'(t)-P_n'(t)|\right)=0$

4. Soit $\psi : I \to \mathbb{R}$ continue et positive. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, (pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in I$, $P_n(t)\geq 0$), et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{t\in[a,b]}|\psi(t)-P_n(t)|\right)=0$

Problème 2

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé, par la suite, les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles discrètes ou àà densité. Si X est une variable aléatoire sur (Ω, A, P), la fonction génératrice des moments de X, lorsqu'elle existe, est la fonction numérique de la variable réelle t, $M_X : t \to E(e^{tX})$, où $E(e^{tX})$ désigne l'espérance de la variable aléatoire e^{tX}.

Partie I
Cas particulier : variables aléatoires discrètes finies

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, ..., p_r$, où $r\in\mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on définit la fonction φ_X sur $\mathbb{R}^*$ par,

$$\forall t\in\mathbb{R}^*,\quad \varphi_X(t)=\frac{1}{t}\ln(M_X(t))$$

1. Déterminer M_Z, lorsque Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $p\in[0,1]$.

2. Montrer que M_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout entier naturel k, $M_X^{(k)}(0)=E(X^k)$.

3. (a) Montrer que φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0. On pose $\varphi_X(0)=E(X)$ et on note encore φ_X la fonction ainsi prolongée.

(b) Démontrer que φ_X est dérivable en 0 et calculer $\varphi_X'(0)$ en fonction de la variance $V(X)$ de X.

(c) i. Montrer que pour tout $u\leq 0$, $e^u\leq 1+u+\frac{1}{2}u^2$.

ii. Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors, pour tout $t\geq 0$,

$$\varphi_X(t)\leq E(X)+\frac{t}{2}E(X^2).$$

(d) i. Pour tout entier i tel que $1\leq i\leq r$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $t\mapsto e^{tx_i}$. Montrer que la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre.

ii. En déduire que deux variables discrètes finies X et Y ont la même loi si, et seulement si, les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.

(e) Montrer que si X et Y sont des variables discrètes finies indépendantes, alors, $\varphi_{X+Y}=\varphi_X+\varphi_Y$.

(f) En déduire M_X, lorsque X suit une loi binomiale de paramètre s et p, s est un entier naturel non nul et $0\leq p\leq 1$.

(g) On dit qu'une variable aléatoire réelle X est symétrique si X et $-X$ ont la même loi. Montrer que φ_X est impaire si, et seulement si, X est une variable aléatoire réelle symétrique.

4. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires discrètes finies mutuellement indépendantes sur (Ω, A, P), qui suivent la même loi que X. On note m l'espérance de X et σ son écart-type que l'on suppose strictement positif.

On pose, pour tout entier naturel non nul, $S_n=X_1+X_2+...+X_n$ et $S_n^*=\dfrac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel non nul t,

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

(b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{S_n^*}(t) = \dfrac{t}{2}$.

Partie II
Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

Soit X une variable aléatoire discrète réelle infinie, notons I_X l'ensemble des réels t pour lesquels M_X existe.

1. (a) Montrer que, pour tous réels a, b, c tels que $a < b < c$ et tout réel x, $e^{bx} \leq e^{ax} + e^{cx}$.

(b) En déduire que I_X est un intervalle contenant 0.

2. Soit Y une variable aléatoire discrète réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la fonction génératrice des moments M_Y de Y.

3. On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle de la forme $]-a, a[$, $(a > 0)$. Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]-a, a[$, $u_n(t) = P(X = x_n)e^{tx_n}$. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset]-a, a[$, et soit $\rho \in]\alpha, a[$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n^{(k)}(t)| \leq P(X = x_n)(|x_n|)^k e^{\rho|x_n|}$, où $u_n^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction u_n.

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $M_k > 0$, pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq M_k P(X = x_n)e^{\rho|x_n|}.$$

(c) En déduire que M_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$.

4. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Partie III
Cas des variables aléatoires à densité

Si X est une variable aléatoire àă densité, on note I_X l'intervalle de $\mathbb{R}$, qui contient 0, pour lequel M_X existe.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires àă densité indépendantes, qui admettent respectivement des fonctions génératrices des moments M_X et M_Y , montrer que $M_{X+Y} = M_X M_Y$.

2. Soit X une variable aléatoire à densité possédant une fonction génératrice des moments M_X et une densité f. On suppose que cette fonction génératrice des moments soit définie sur $I_X =]a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < 0 < b$, et soit s un réel tel que, $0 < s < \min(-a, b)$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $|t^k| \leq \frac{k!}{s^k}e^{s|t|}$.

(b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E(|X|^k)$ est finie.

(c) Montrer que, pour tout $t \in]-s, s[$, $M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} E(X^k)\frac{t^k}{k!}$.

(d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

FIN DE L'ÉPREUVE