Limites et Continuité

Résumé

Ensemble de définition

f étant une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \text{ est défini}\}$$

Càd : $x \in D_f \Rightarrow f(x)$ défini

Courbe représentative d'une fonction

Soit $f \in \mathcal{F}(\Delta, \mathbb{R})$

$$C_f = \{(x, f(x)) \,/\, x \in \Delta\}$$

Càd :

$$(x, y) \in C_f \iff y = f(x)$$

Parité :

Soit $f \in \mathcal{F}(\Delta, \mathbb{R})$

Déf :

1) f est paire $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \Delta, -x \in \Delta \\ \forall x \in \Delta, f(-x) = f(x) \end{cases}$

2) f est impaire $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \Delta, -x \in \Delta \\ \forall x \in \Delta, f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Exemples usuels

f	D_f	parité de f
cos	$\mathbb{R}$	paire
sin	$\mathbb{R}$	impaire
tan	$\mathbb{R} / \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$	impaire
$x \longmapsto x^{2n}$	$\mathbb{R}$	paire
$x \longmapsto x^{2n+1}$	$\mathbb{R}$	impaire

NB : si f est paire (resp impaire) alors sa courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'axe (Oy) (resp l'origine O).

Périodicité

Déf : Soit $f \in \mathcal{F}(\Delta, \mathbb{R})$

f est dite périodique si et ss'il existe $T > 0$ tel que :

1/ $\forall x \in \Delta$, $x+T \in \Delta$ et $x-T \in \Delta$

2/ $\forall x \in \Delta$, $f(x+T) = f(x)$

Prop 2 : Soit $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ T-périodique

On a : $\left(\forall x \in D, \forall m \in \mathbb{Z} ; f(x+mT) = f(x)\right)$

NB : Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, T-périodique

Pour tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur $\mathbb{R}$, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur T puis on complète.

Opérations sur les fonctions :

Ici : f et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$

a) Somme $(f+g)$

$$(f+g) : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) + g(x)$$

b) Combinaisons Linéaires $(\alpha f+\beta g)$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

$$(\alpha f+\beta g):D\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\alpha f(x)+\beta g(x)$$

c) Produit (fg) :

$$(fg):D\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto f(x)g(x)$$

d) Inverse $\frac{1}{f}$:

On suppose que $(\forall x\in D, f(x)\neq 0)$

$$\frac{g}{f}:D\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\frac{g(x)}{f(x)}$$

max (f,g) et min (f,g) :

Rappel : soient a et $b\in\mathbb{R}$

$$\max(a,b)=\begin{cases}a & \text{si } a\geq b\\ b & \text{si } a\leq b\end{cases}$$

$$\min(a,b)=\begin{cases}a & \text{si } a\leq b\\ b & \text{si } b<a\end{cases}$$

Prop 1 :

$$\max(a,b)=\frac{a+b+|a-b|}{2}$$

$$\min(a,b)=\frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Déf 2 : Soient f et $g \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$

1) $\max(f,g) : D \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \max(f(x), g(x))$$

2) $\min(f,g) : D \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \min(f(x), g(x))$$

Prop 3 :

1) $\max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$

2) $\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$

Ordre :

Déf :

Soient f et $g \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$.

$$f \leq g \iff (\forall x \in D,\ f(x) \leq g(x))$$

NB : On a

1) $f \leq 0$ sur $D \iff (\forall x \in D,\ f(x) \leq 0)$

2) $f < 0$ sur $D \iff (\forall x \in D,\ f(x) < 0)$

3) $f \geq 0$ sur $D \iff (\forall x \in D,\ f(x) \geq 0)$

4) $f > 0$ sur $D \iff (\forall x \in D,\ f(x) > 0)$

NB :

1) $f \leq g$ sur $D \iff (\mathcal{C}_f)$ au dessous de $(\mathcal{C}_g)$ sur D

2) De même

$f \geq g$ sur $D \iff (\mathcal{C}_f)$ au dessus de $(\mathcal{C}_g)$ sur D.

Composée $g \circ f$:

Ici : $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Si en plus $f(A) \subset B$

On peut parler de la composée $g \circ f$:

$$g \circ f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(f(x))$$

Bornitude :

Déf :

1) f est dite majorée sur A si et ssi :

$(\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ f(x) \leq M)$

2) f est dite minorée sur A si et ssi :

$(\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leq f(x))$

3) f est dite bornée sur A si et ssi f est à la fois majorée et minorée sur A

Càd : $(\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A, m \leq f(x) \leq M)$

Prop 2 :

f bornée sur A $\Longleftrightarrow (\exists c \geq 0, \forall x \in A, |f(x)| \leq c)$

NB : Si f et g sont bornées sur A, alors il en est de même par $(\alpha f + \beta g)$ et $f \cdot g$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Monotonie :

Déf 1 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I intervalle de $\mathbb{R}$

1) f est dite croissante sur I si et ssi

$\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

2) f est strictement croissante sur I si et ssi

$\forall x, y \in I, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

3) f est décroissante sur I si et ssi :

$\forall x, y \in I ; x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

4) f est strict décroissante sur I si et ssi :

$\forall x, y \in I ; x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

5| f est constante sur I si et ssi :

$\forall x, y \in I, \quad f(x) = f(y)$.

Déf 2 :

1| f est dite monotone sur I si et ssi elle est croissante ou décroissante sur I.

2| Idem pour f strict monotone sur I.

Propriété vraie au voisinage d'un point.

Ici : 1/ $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I intervalle non vide et non réduit à un singleton.

2/ $a \in I$ où a est une extrémité de I (a fini ou infini).

Déf : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ (a réel donc).

Une propriété portant sur f est vraie au voisinage de a si et ssi elle est vraie sur $I \cap]a-r, a+r[$, où $]a-r, a+r[$ est un intervalle ouvert centré en a.

Déf 2 :

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(+\infty)$ étant une extrémité de I.

Une propriété est vraie au voisinage de $+\infty$ si et ssi elle est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$. où A est un réel.

Déf 3 : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $(-\infty)$ est une extremité de I

Une propriété est vraie au voisinage de $(-\infty)$ si et ssi elle est vraie sur $I \cap]-\infty, A]$ où A est un réel.

Notion de Limite d'une fonction.

I sera un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et non réduit à un singleton.

a sera un réel de I ou une extremité de I

Limite finie :

Déf 1 : Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et a un réel de I

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell\right) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\right)$$

Déf 2 : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $l \in \mathbb{R}$.

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = l\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon\right)$$

Déf 3 : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $l \in \mathbb{R}$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = l\right) \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists A < 0, \forall x \in I, x \leq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon\right)$$

Déf 6 :

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et soit $a \in I$.

f est dite continue en a si et ssi :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Prop 7 :

$a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

(f est continue en a) $\Longleftrightarrow$ (f possède une Limite finie en a)

Prop 8 : Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Si f possède une Limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Limite infinie :

Déf 1 : a réel de I et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

1°/ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si ssi :

$$\left(\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A\right)$$

2/ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ si et ssi :

$$\left(\forall A < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \eta \Longrightarrow f(x) \leq A\right)$$

Déf 2 : $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si et ssi :

$$\left(\forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A\right)$$

2°/ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si et ssi :

$$\left(\forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \geq A\right)$$

3°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ si et ssi :

$$\left(\forall A < 0, \exists B > 0, \forall x \in I, x \geq B \Rightarrow f(x) \leq A\right)$$

4°/ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\left(\forall A < 0, \exists B < 0, \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \leq A\right)$$

Limite à droite et Limite à gauche.

Déf 1 : (Limite à droite)

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et a un réel de I.

(f supposée définie à droite en a)

1/ Soit $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell$ si et ssi :

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a < x \leq a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\right)$$

2/ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ si et ssi :

$$\left(\forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a < x \leq a + \eta \Rightarrow f(x) \geq A\right)$$

3/ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$ si et ssi :

$$\left(\forall A < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a < x \leq a + \eta \Rightarrow f(x) \leq A\right)$$

Déf 2 : (Limite à gauche)

$f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et a un réel de I.

(f supposée définie à gauche en a)

1/ Soit $\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell$ si et ssi :

$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, a - \eta \leq x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\right)$$

2/ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ si et ssi :

$(\forall A>0, \exists \eta>0, \forall x\in I, a-\eta\leq x<a \Rightarrow f(x)\geq A)$

3/ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$ si et ssi :

$(\forall A<0, \exists \eta>0, \forall x\in I, a-\eta\leq x<a \Rightarrow f(x)\leq A)$

Notation :

1/ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ se note aussi $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

2/ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ se note aussi $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

Déf 3 : a réel de I et $f\in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

1/ f est dite continue à droite en a si et ssi :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

2/ f est dite continue à gauche en a si et ssi :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Prop 1 : Une fonction est continue en un point si elle est continue à gauche et à droite en ce point.

Caractérisation séquentielle de la limite et de la continuité :

Prop 1 : (Caractérisation séquentielle de la limite)

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1/ $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

2/ Pour toute suite $(x_n)_n$ à valeurs dans I, (si $\lim_n x_n = a$ alors $\lim_n f(x_n) = \ell$)

Corollaire 2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

$f : I \to \mathbb{R}$, a réel de I.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue en a.

2) Pour toute suite $(x_n)_n$ à valeurs dans I

(Si $\lim_n x_n = a$ alors $\lim_n f(x_n) = f(a)$)

Application 1 :

Si on veut montrer qu'une fonction n'a pas de Limite en a, il suffit de trouver deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ tendant vers a, mais $\lim_n (f(x_n)) \neq \lim_n f(y_n)$

Application 2 : Si on veut montrer qu'une fonction n'est pas continue en a, il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ de Limite a telle que

$$\lim_n f(x_n) \neq f(a)$$

Opérations algébriques sur les limites de fonction

Ici : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Prop 1 : (Combinaison Linéaire)

Soient α, β, ℓ et $L \in \mathbb{R}$

Si $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \end{pmatrix}$ Alors $\left(\lim\limits_{x \to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \ell + \beta L \right)$

Prop 2 : Soient ℓ et $L \in \mathbb{R}$.

Supp que $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \end{cases}$ On a :

1) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |\ell|$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) g(x) = \ell L$

3) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{L}$ (quand $L \neq 0$)

Prop 3 : (Composition)

a, b et $\ell \in \mathbb{R}$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.

Si $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell \end{pmatrix}$ alors $\left(\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \ell \right)$

Prop 1 : (Conservation d'inégalité par passage à la limite)

f et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Supp que f et g possèdent des limites finies en a :

Si ($f \leq g$ au voisinage de a)

Alors $\left(\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x) \right)$

NB : Si ($f < g$ au voisinage de a)

alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Prop 2 : (Théorème des gendarmes)

f et g et $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $\left(\begin{array}{l} f \leq g \leq h \text{ au voisinage de } a \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell \end{array} \right)$

Alors $\left(\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \right)$

NB :

Dans le Thm des gendarmes, la limite commune doit être finie.

Prop 3 : f et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Supp que $f \leq g$ au voisinage de a

1/ Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ Alors $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$

2/ Si $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$ Alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Prop 4 : (Thm de La limite monotone)

a et $b \in \overline{\mathbb{R}}$

$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante.

1/ $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$ existent (finies ou infinies).

2/ i) Si f est majorée alors $\lim_{x \to b} f(x)$ est finie

On a précisement : $\lim_{x \to b} f(x) = \sup_{x \in]a,b[} (f(x))$

ii) Si f n'est pas majorée, Alors $\lim_{x \to b} f(x) = +\infty$

3/ i) Si f est minorée alors $\lim_{x \to a} f(x)$ est finie

On a précisement $\lim_{x \to a} f(x) = \inf_{x \in]a,b[} (f(x))$.

ii) Si f n'est pas minorée alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

NB : Prop 4 adaptable au cas où f est décroissante

Continuité :

Prolongement par continuité en un point :

Prop et déf : a réel.

Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$

Supp que f possède une limite finie en a.

1/ La fonction $\hat{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \lim\limits_{a} f & \text{si } x = a \end{cases}$$

est l'unique prolongement de f qui est continue en a.

2/ $\hat{f}$ s'appelle le prolongement par continuité de f en a.

Vocab : Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$

f est dite prolongeable par continuité en a si et ssi f possède une limite finie en a.

Operations algébriques sur les fcts continues

Déf 1 : f est continue sur I si et ssi elle est continue en tout point de I

Prop 2 : g et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \in I$

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$. On a :

1/ f continue en $a \Rightarrow |f|$ continue en a

2/ f et g continues en $a \Rightarrow f \cdot g$ continue en a

3/ f et g continues en $a \Rightarrow (\alpha f + \beta g)$ continue en a

4/ Si (f et g continues en a et $f(a) \neq 0$)

alors ($\frac{g}{f}$ est continue en a.)

Corollaire

f et $g : I \to \mathbb{R}$.

Si (f et g sont continues sur I) alors il en est de même pour les fonctions suivantes :

1/ $|f|$

2/ $|\alpha f + \beta g|$, où α et $\beta \in \mathbb{R}$

3/ $f \cdot g$

4/ $\frac{g}{f}$ (si f ne s'annule pas sur I)

Prop 4 : Continuité de la composée :

$f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.

Si $\left(\begin{array}{l} f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } f(a) \end{array} \right)$ alors ($g \circ f$ continue en a)

Corollaire 5 : $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$

avec $f(I) \subset J$

Si $\left(\begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ g \text{ continue sur } J \end{array} \right)$ alors ($g \circ f$ continue sur I)

TVI et l'image continue d'un intervalle.

Prop 1 : (TVI)

$a < b$ deux réels.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors

$$\left(\exists c \in [a, b],\ f(c) = y \right)$$

Corollaire 2 : $a < b$ deux réels.

Si $\begin{pmatrix} ① \ f \text{ continue sur } [a,b] \\ ② \ f(a) \cdot f(b) \leq 0 \end{pmatrix}$

Alors $\left(\exists\, c \in [a,b],\ f(c) = 0\right)$

NB$_1$: $\begin{pmatrix} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\exists\, c \in \,]a,b[\,,\ f(c) = 0\right)$

NB$_2$: f continue sur $[a,b]$

$\left(f(a) \cdot f(b) \leq 0 \text{ et } f \text{ strict mono}\right) \Rightarrow \left(\exists!\, c \in [a,b],\ f(c) = 0\right)$

Corollaire 3 : (L'image continue d'un intervalle)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I

Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$

Autres théorèmes classiques :

Prop 1 $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

si f est continue sur $[a,b]$ alors :

1) $f([a,b])$ est aussi un segment.

2) f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes.

Càd :

1/ $f([a,b]) = [\alpha, \beta]$, où ($\alpha \leq \beta$ réels)

2/ f bornée sur $[a,b]$ et

$$\begin{cases} \exists x_0 \in [a,b] \ / \ f(x_0) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) \\ \exists y_0 \in [a,b] \ / \ f(y_0) = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) \end{cases}$$

Prop 2 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On a :

(f strict monotone sur I) $\Longleftrightarrow$ (f injective)

Prop 3 :

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strict monotone sur I.

1) f définit alors une bijection de I vers l'intervalle $J = f(I)$

2) En plus sa réciproque f^{-1} est aussi continue et strict monotone sur J, de même monotonie que f

Brêve extension aux fonctions complexes

Ici I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$

$\longrightarrow f = Re(f) + i\,Im(f)$

$\longrightarrow Re(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto (Re(f))(t) = Re(f(t))$

$\longrightarrow Im(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto Im(f)(t) = Im(f(t))$

Bornitude

Déf 1 : f est dite **bornée** sur I si et ssi :

$\exists M \geq 0,\ \forall t \in I,\ |f(t)| \leq M$

module.

Prop 2 :

f est bornée si et ssi $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont

Limite et continuité d'une fonction complexe

Déf 1 : Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$\lim_{t \to a} f(t) = \ell \iff \lim_{t \to a} |f(t) - \ell| = 0$$ module

Prop 2 :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim_{t \to a} f(t) = \ell$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in I \; |t - a| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - \ell| \leq \varepsilon$ valeur absolue module

Prop 2 :

$$\lim_{t \to a} f(t) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{t \to a} \mathrm{Re}\big(f(t)\big) = \mathrm{Re}(\ell) \\ \lim_{t \to a} \mathrm{Im}\big(f(t)\big) = \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Déf 3 : $f : I \to \mathbb{C}$ et a réel de I.

1) f est continue en a si et ssi : $\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$

2) f continue sur I si et ssi f continue en tout point de I

Prop 4 : f est continue sur I si et ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues sur I

Fin