

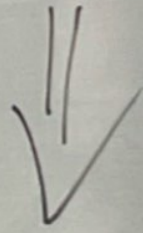
Déf 1 (Rayon de Convergence)

Le rayon de convergence de la SE  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est :

$$R = \sup \left( \left\{ r > 0 / (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite bornée} \right\} \right)$$

$$\left| \sum_n a_n z^n \right|$$

Supposons que la suite  $(a_n \cdot 2^n)_n$  bornée

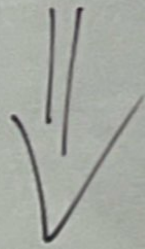


$R < 2$



$$\left| \sum_n a_n z^n \right|$$

Supposons que la suite  $(a_n \cdot 2^n)_n$  bornée



$$R \geq 2$$



$$\sum_n a_n z^n \quad SE$$

---

Supposons que la suite  $(a_n)_n$  bornée

⇓ ?

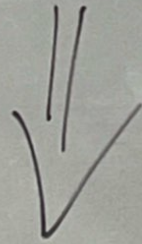
R



$$\sum_n a_n z^n \quad SE$$

---

Supposons que la suite  $(a_n)_n$  bornée



$$\boxed{R \gg 1}$$

(car  $(a_n \cdot 1^n)$  bornée

$\rightarrow 1 \in \{r, 0, \dots\}$ )

Qna ( $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sin(n) \neq 0$ )? Pourquoi?



$$\sin x = 0 \iff (\exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi)$$

Proprietà



Da  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n) \neq 0)$ . Power series?

Ein Effekt:

$$\sin(n) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, n = k\pi)$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, \pi = \frac{n}{k})$$

$\Rightarrow \pi \in \mathbb{Q}$ ; absurde Car  $\pi$  irrational

D'au:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n) \neq 0)$



$$\sum_{n \geq 1} \sin(n) z^n \quad \underline{SE.}$$

Déterminer  $R$ , ou RCV

$$a_n = \sin(n) \quad (\forall n \geq 1)$$

$$\text{On a } (\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n) \neq 0).$$

Alors le critère de D'Alembert pour les séries entières est applicable.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin(n+1)}{\sin(n)} \right| \quad (\text{Impasse!!})$$

↓

⊘

$$\sum_{n \geq 1} \sin(n) z^n \quad \underline{SE}.$$

Déterminer  $R$ , ou RCV

On a  $(\sin(n) \cdot 1^n)_n$  bornée

$$\Rightarrow \boxed{R \geq 1}$$

On a que  $R = 1$  (car si  $R < 1$ )



$$\sum \frac{z^n}{n} \longrightarrow R=1$$

$$\forall |z| < 1, \sum \frac{z^n}{n} \text{ ACV}$$

$$\forall |z| > 1, \sum \frac{z^n}{n} \text{ DIVG}$$

Par exemple:

$$\sum \frac{2^n}{n} \text{ DIVG} \quad \sum \frac{1}{2^n \cdot n} \text{ CV}$$

Si  $|z|=1$  !

$$\rightsquigarrow z=1$$
$$\sum \frac{1}{n} \text{ DIV}$$

$$\rightsquigarrow z=-1$$
$$\sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ CV}$$

$$\text{Let } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

R von RCV

$$\text{Dne: } \begin{cases} \forall |x| < R, \sum a_n x^n \text{ CV} \\ \forall |x| > R, \sum a_n x^n \text{ Div} \end{cases}$$

Question:  $D_f = ?$  (possibly)?



2) Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

$D_f$  est l'un des intervalles suivants :

$] -R, R[$ ,  $[-R, R]$ ,  $] -R, R]$ ,  $[-R, R[$

$$2n$$

$$2n + 1$$

$$4n$$

$$4n + 1$$

$$4n + 2$$

$$4n + 3$$