Déf 1 (Rayon de Convergence)

Le rayon de convergence de la SE $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est :

$$R = \sup\left(\left\{ r \geq 0 \;/\; (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite bornée} \right\}\right)$$

$\left|\sum_n a_n z^n\right|$

Supposons que la suite $(a_n \cdot 2^n)_n$ bornée

$\Downarrow$

$R \quad 2$

$$\left|\sum_n a_n z^n\right|$$

Supposons que la suite $(a_n \cdot 2^n)_n$ bornée

$$\Downarrow$$

$$R \geqslant 2$$

$$\sum_n a_n z^n \quad SE$$

Supposons que la suite $(a_n)_n$ bornée

$\Downarrow$?

R

$\sum_n a_n z^n$ SE

Supposons que la suite $(a_n)_n$ bornée

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R \geqslant 1}$$

(car $(a_n \cdot 1^n)$ bornée

$1 \in \{ r \geqslant 0 / \dots \}$

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n) \neq 0)$. Pourquoi?

$$\sin x = 0 \iff (\exists k \in \mathbb{Z};\, x = k\pi)$$

Rappel

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n) \neq 0)$. Pourquoi?

En effet :

$\sin(n) = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, n = k\pi)$

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, \pi = \frac{n}{k})$

$\Rightarrow \pi \in \mathbb{Q}$; absurde car π irrationnel

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n) \neq 0)$.

$$\sum_{n\geq 1} \sin(n)\, z^n \quad \underline{SE}.$$

Déterminer R, son <u>RCV</u>

$$a_n = \sin(n) \quad (\forall n \geq 1)$$

On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n) \neq 0)$.

Alors le Critère de D'Alembert pour les Sér entiè est applicable.

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\sin(n+1)}{\sin n}\right| \quad (\text{Impasse !!})$$

$\rightarrow \nexists$

Scanned with CamScanner

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \sin(n)\, z^n \quad \underline{\text{SE}}.}$$

Déterminer R, son <u>RCV</u>

On a $(\sin(n) \cdot 1^n)_n$ bornée

$$\Rightarrow \boxed{R \geq 1}$$

M.q. que $R = 1$ (reste $R \leq 1$)

$$\sum \frac{z^n}{n} \longrightarrow R = 1$$

$\forall |z| < 1$, $\sum \frac{z^n}{n}$ ACV

$\forall |z| > 1$, $\sum \frac{z^n}{n}$ DivG

Par exemple :

$\sum \frac{2^n}{n}$ Div et $\sum \frac{1}{2^n \cdot n}$ CV

Si $|z| = 1$ ⚠

$\rightsquigarrow z = 1$	$\rightsquigarrow z = -1$
$\sum \frac{1}{n}$ DIV	$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

R son RCV

Donc : $\begin{cases} \forall |x| < R, \sum a_n x^n \text{ CV} \\ \forall |x| > R, \sum a_n x^n \text{ Div} \end{cases}$

Question : $D_f = ?$ (possibles)?

2) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

D_f est l'un des intervalles suivants :

$]-R, R[$, $[-R, R]$, $]-R, R]$, $[-R, R[$

$2n$

$2n+1$

$4n$

$4n+1$

$4n+2$

$4n+3$