

Extrait du Problème N°1

Partie II

Une démonstration probabiliste du théorème de Stone-Weierstrass

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x , $x \in [0, 1]$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{S_n}{n}$.
 - (a) Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n .
 - (b) Justifier que, pour tout $\delta > 0$, $P(|X_n - x| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.
2. On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose pour tout $x \in [0, 1]$, $C_n(f)(x) = E(Y_n)$. Pour la suite de cette question, on se donne un réel $\varepsilon > 0$.
 - (a) Vérifier que $x \mapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0, 1]$.
 - (b) D'après le théorème de Heine, comme f est continue sur $[0, 1]$, alors il existe $\beta > 0$ tel que, pour tout $(x_1, x_2) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $|x_1 - x_2| \leq \beta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. (On ne vous demande pas de redémontrer ce résultat).

i. Montrer que $\left| \sum_{|\frac{k}{n} - x| \leq \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

ii. Montrer que $\left| \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n\beta^2}$, avec $M = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$.

Extrait du CNC - 2016 - (MP)

1. Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et x , $x \in [0, 1]$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \frac{S_n}{n}$.

(a) Déterminer $E(X_n)$ et $V(X_n)$ respectivement l'espérance et la variance de X_n .

(b) Justifier que, pour tout $\delta > 0$, $P(|X_n - x| \geq \delta) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$.

Solution :

$$1) a) E(X_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} E(S_n)$$

$$= \frac{1}{n} \cdot n x \quad (\text{car } S_n \sim B(n, x))$$

$$= x$$

$$V(X_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} V(S_n)$$

$$= \frac{1}{n^2} n x (1-x) \quad (S_n \sim B(n, x))$$

$$= \frac{x(1-x)}{n}$$

b) Soit $\delta > 0$.

$$P(|X_n - x| \geq \delta) = P(|X_n - E(X_n)| \geq \delta)$$

$$\leq \frac{V(X_n)}{\delta^2} \quad (\text{l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev})$$
$$= \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$$

Pour terminer, il suffit de vérifier que

$$\text{On a : } \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2} \Leftrightarrow x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 \geq 0$$

Ce qui est vrai $\square$

2) (a) Vérifier que $x \mapsto C_n(f)(x)$ est une fonction polynomiale définie sur $[0, 1]$.

Soit $x \in [0, 1]$. On a:

$$C_n(f)(x) = E(f(X_n))$$

$$\text{On a } S_n(\Omega) = \{0, \dots, n\} \Rightarrow \left\{ X_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} / 0 \leq k \leq n \right\} \right.$$

Ainsi, d'après la formule du transfert on a:

$$C_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k)$$

$$C_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Car} \\ S_n \sim B(n, x) \end{array} \right)$$

c'est une fonction polynomiale définie sur $[0, 1]$.

2) i. Montrer que $\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $x \in [0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \beta} \underbrace{\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \beta} P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$= 1; \quad X_n(\Omega) = \left\{ \frac{k}{n} / 0 \leq k \leq n \right\}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}$$

2) ii. Montrer que $\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n\beta^2}$, avec $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$.

Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\left| \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \beta} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \beta} \underbrace{\left(\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \left| f(x) \right| \right)}_{\leq 2M} P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$\leq 2M \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \beta} P\left(X_n = \frac{k}{n}\right)$$

$$= P\left(|X_n - x| > \beta\right)$$

$$= 2M P\left(|X_n - x| > \beta\right)$$

$$\stackrel{1^{\circ}/b^{\circ}}{\leq} 2M \cdot \frac{1}{4n\beta^2}$$

$$= \frac{M}{2n\beta^2}$$