CCP2017 - MP1

Problème : séries trigonométriques

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

Partie 1 : exemples

5. Démontrer que la série trigonométrique $\sum\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p\geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$
(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).
6. Ecrire la fonction $\varphi\ :\ x\mapsto\exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x\mapsto\exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.
7. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n\cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
8. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

9. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

10. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x\mapsto|a\cos(x)+b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.
11. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

12. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f\in C_{2\pi}$.
13. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx$ pour $n\neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx$ pour k et n entiers.
14. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f)=a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k\neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx=0$.
On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f)=b_n$ et $\beta_0(f)=0$ (la démonstration n'est pas demandée).
15. Soit $f\in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x)=\frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $u_n(x)=\alpha_n(f)\cos(nx)+\beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum(u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :
$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\frac{\alpha_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx)+\beta_k(f)\sin(kx))$$
Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

16. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement que $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

17. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$.
18. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.
19. En déduire les sommes
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$
Déduire alors de la seconde somme la valeur de
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$
20. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$.
21. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?
Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométriquen$\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
22. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n}\cos(nx)$.

Solution

5. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

A Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\left|\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}\underbrace{|\cos(nx)|}_{\leqslant 1} + \frac{1}{3^n}\underbrace{|\sin(nx)|}_{\leqslant 1} \quad (\text{inég-triang})$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

Or la série $\sum_{n \geqslant 0}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ converge, comme somme de deux séries géométriques convergentes. $\left(\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1 \text{ et } \left|\frac{1}{3}\right| < 1\right)$.

Alors la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 0}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

B Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$

(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

i) Soit $p \geqslant 2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = ?$

C'est la somme d'une série géométrique, et on a $\left|\frac{e^{ix}}{p}\right| = \frac{1}{p} < 1$

Car $p \geqslant 2$.

Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}}$$

$$= \frac{p}{p-e^{ix}}$$

ii) Déduisons la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{2^n}+\frac{\sin(nx)}{3^n}\right)$:

On a : $\forall x\in\mathbb{R}, \forall p\geqslant 2, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{p}{p-e^{ix}}$

Càd : $\forall x\in\mathbb{R}, \forall p\geqslant 2, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{p^n} = \frac{p}{p-e^{ix}}$

Alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \forall p\geqslant 2, \text{ on a : } \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \mathrm{Re}\left(\frac{p}{p-e^{ix}}\right) \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{p^n} = \mathrm{Im}\left(\frac{p}{p-e^{ix}}\right) \end{cases} \quad \star$$

Par suite :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{2^n}+\frac{\sin(nx)}{3^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n}$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{2}{2-e^{ix}}\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{3}{3-e^{ix}}\right) \quad \left(\text{d'après } \star\right)$$

$$= Re\left(\frac{2(2-e^{-ix})}{|2-e^{ix}|^2}\right) + Im\left(\frac{3(3-e^{-ix})}{|3-e^{ix}|^2}\right)$$

$$|2-e^{ix}|^2 = (2-e^{ix})(2-e^{-ix})$$
$$= 4-2e^{ix}-2e^{-ix}+1$$
$$= 5-2.2\cos x$$
$$= 5-4\cos x$$

$$|3-e^{ix}|^2 = (3-e^{ix})(3-e^{-ix})$$
$$= 9-3(e^{ix}+e^{-ix})+1$$
$$= 10-3.2\cos x$$
$$= 10-6\cos x$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\cos(nx)}{2^n}+\frac{\sin(nx)}{3^n}\right) = Re\left(\frac{2(2-e^{-ix})}{5-4\cos x}\right) + Im\left(\frac{3(3-e^{-ix})}{10-6\cos x}\right)$$

$$= \frac{2}{5-4\cos x}.(2-\cos x) + \frac{3}{10-6\cos x}.\sin x$$

6. Ecrire la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

On a :

$$\exp(e^{ix}) = \exp(\cos x + i\sin x)$$
$$= e^{\cos x}.e^{i\sin x}$$
$$= e^{\cos x}.\left(\cos(\sin x)+i\sin(\sin x)\right)$$
$$\Rightarrow e^{\cos x}.\cos(\sin x) = Re\left(\exp(e^{ix})\right)$$

$$\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{ix})^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}$$

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

$$\Rightarrow Re(\exp(e^{ix})) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\cos x} \cdot \cos(\sin x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}}$$

7. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

La série trigonométrique $\sum_n a_n \cos(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, veut dire :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, \text{ la série numérique } \sum_n a_n \cos(nx) \text{ converge}\right)$$

Alors la série trigonométrique $\sum_n a_n \cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ est équivalent à :

$$\left(\exists x \in \mathbb{R} \,/\, \sum_n a_n \cos(nx) \text{ diverge}\right)$$

Avec $(\cos(n.0) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N})$, on prend alors la suite $(a_n)_n$:

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n}\right)$$

On a que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. En plus, on a aussi que la série

$\sum_n a_n \cos(n.0)$, qui est $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, est bien divergente. $\square$

8. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

On rappelle que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et ssi la série positive suivante converge :

$$\sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}}\right) \text{ converge}$$

Soit $n\geqslant 1$. On a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(|\sin(nx)|\right)$$

et $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(|\sin(nx)|\right) = 1 = \left|\sin\left(n.\frac{\pi}{2n}\right)\right|$ $\left(\begin{array}{l}\forall x\in\mathbb{R}, |\sin(nx)|\leqslant 1 \\ \text{et } 1 \text{ est un maximum} \\ \text{atteint en } x=\frac{\pi}{2n}\end{array}\right)$

D'où $\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Et donc la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

Enfin, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$. $\square$

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

9. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Supposons que $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont ACV sur $\mathbb{R}$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_n \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$ CN sur $\mathbb{R}$.

Soient alors $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$|a_n \cos(nx) + b \sin(nx)| \leqslant |a_n| \cdot \underbrace{|\cos(nx)|}_{\leqslant 1} + |b_n| \cdot \underbrace{|\sin(nx)|}_{\leqslant 1} \quad (\text{inég\_triang})$$

$$\leqslant |a_n| + |b_n|$$

Or la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} (|a_n| + |b_n|)$ converge, comme somme de deux séries convergentes, vu que $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont ACV sur $\mathbb{R}$.

Alors la série de fonctions $\sum_n \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$ CN sur $\mathbb{R}$. □

Une condition nécessaire

10. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

Il s'agit de vérifier que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{i)}\ \forall x \in \mathbb{R},\ |a \cos x + b \sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \\ \text{ii)}\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ |a \cos(x_0) + b \sin(x_0)| = \sqrt{a^2+b^2} \end{array}}$$

i) $\forall x \in \mathbb{R},\ |a \cos x + b \sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$?

Cas 1 : Si $(a,b)\neq(0,0)$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

Clé

$$a\cos(x)+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

On a $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, alors il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que :

$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$|a\cos x+b\sin x|\leq\sqrt{a^2+b^2}$?

D'où : $a\cos(x)+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos(\theta)\cos(x)+\sin(\theta)\sin x\right)$

$$\boxed{a\cos(x)+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)}$$

$$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ |a\cos(x)+b\sin x|=\sqrt{a^2+b^2}\underbrace{|\cos(x-\theta)|}_{\leq 1}$$

$$\leq\sqrt{a^2+b^2}$$

□

Cas 2 : Si $(a,b)=(0,0)$

L'inégalité i) est bien vérifiée $(0\leq 0)$

ii) $\exists x_0\in\mathbb{R},\ |a\cos(x_0)+b\sin(x_0)|=\sqrt{a^2+b^2}$?

Cas 1 : Si $(a,b)\neq(0,0)$

On a $\left(\forall x\in\mathbb{R},\ a\cos(x)+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta)\right)$

Alors pour $x_0=\theta$, on a $|a\cos(x_0)+b\sin(x_0)|=\sqrt{a^2+b^2}$

□

Cas 2 : Si $(a,b)=(0,0)$

$\exists x_0 \in \mathbb{R},\ |a\cos(x_0)+b\sin(x_0)|=\sqrt{a^2+b^2}$?

On a $a=b=0$.

N'importe quel réel x_0 convient. $\square$

11. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Supposons que $\sum_n (a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Alors la série positive $\sum_n \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|\right)$ converge.

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)| \overset{x=0}{\geqslant} |a_n\cos(n\cdot 0)+b_n\sin(n\cdot 0)|$$
$$= |a_n|$$

D'où :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ |a_n| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|} \quad (\Sigma_1)$$

Et puisque la série $\sum_n \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|\right)$ converge.

Alors, par comparaison des séries positives, la série $\sum_n |a_n|$ converge.

D'où : $\boxed{\sum_n a_n \text{ est absolument convergente.}}$

Et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$ (son terme général tend vers 0).

Procédons d'une manière similaire.

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)| \overset{x=\frac{\pi}{2n}}{\geqslant} \left|a_n\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2n}\right)+b_n\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2n}\right)\right|$$
$$= |b_n|$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |b_n| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|}$ (Σ_2)

Et puisque la série $\sum_n \left(\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \right)$ converge.

Alors, par comparaison des séries positives, la série $\sum_n |b_n|$ converge.

D'où : $\boxed{\sum_n b_n \text{ est absolument convergente.}}$

Et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 0}$ (son terme général tend vers 0). $\square$

2ème piste

Supposons que $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Alors la série positive $\sum_n \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |a_n \cos(t) + b_n \sin(t)|$$

$$= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{(d'après la question 10°)}$$

D'autre part, on a :

$\forall n,\ |a_n| = \sqrt{a_n^2} \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

D'où : $\boxed{\forall n,\ |a_n| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|}$

Et c'est l'inégalité $\left(\sum_1\right)$ trouvée ci-dessus.

On obtient de même l'inégalité $\left(\sum_2\right)$:

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ |b_n| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|} \quad \left(\sum_2\right)$$

Et on finit comme dans la 1ère méthode $\square$

Autres propriétés

12. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.

La série de fonctions $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement, donc converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

En plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

D'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

Reste à vérifier que f est 2π-périodique.

Soit alors $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$f(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos(n(x+2\pi)) + b_n \sin(n(x+2\pi))\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right) \quad \left(\text{Car } \cos \text{ et } \sin \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques}\right)$$

$$= f(x)$$

Enfin, $f \in C_{2\pi}$.

$\square$

---

13. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\, dx$ pour k et n entiers.

i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2nx)}{2}\, dx \quad \left(\begin{array}{l}\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 \\ \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \quad \left(\sin(2n\pi) = 0 = \sin(2n.(-\pi))\right)$$

$$= \pi$$

$\square$

---

ii) Soient $k, n \in \mathbb{N}$. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\,dx = 0$

Car la fonction $x \mapsto \sin(kx)\cos(nx)$ est impaire.

$\square$

14. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx = 0$.

Supposons que $\sum_n (a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ C Normalement sur $\mathbb{R}$.

Notons f sa somme : $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)$

i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. M.q. $\alpha_n(f) = a_n$

On a :

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\cos(nx)\right)dx$$

On a la convergence normale de $\sum_k (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$ sur $\mathbb{R}$.

Alors on a aussi la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\cos(nx)$$

Car :

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left| \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) \cdot \cos(nx) \right| \leqslant \left| a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right|$.

D'où la permutation suivante de $\int_{-\pi}^{\pi}$ avec $\sum_{k=0}^{+\infty}$:

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right) \cos(nx) \right) dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx)\, dx + b_k \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx)\, dx}_{=0} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} a_n \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\, dx}_{=\pi} \quad \left(\text{car } \forall k \neq n, \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx)\, dx = 0 \right)$$

$$= a_n$$

---

ii) $\alpha_0(f) = 2a_0$; en effet :

$$\alpha_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b \sin(nx)\right) \right) dx$$

On peut intervertir $\int_{-\pi}^{\pi}$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty}$, car la série de fonctions

$\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ Conv normalement, donc uniformément

sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[-\pi,\pi]$), et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est continue sur $[-\pi,\pi]$.

Ainsi, on a :

$$\alpha_0(f) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos(nx) + b \sin(nx))\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx + b_n \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx}_{=0,\ \text{car sin impaire}} \right)$$

Or $\forall n \neq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

D'où :

$$\alpha_0(f) = \frac{1}{\pi} \cdot a_0 \cdot \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx}_{=2\pi}$$

$$= 2a_0$$

15. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum(u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

Notons la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} u_n(x) = \sum_{n\geq 0}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$, où :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \geq 1,\ a_n = \alpha_n(f) \text{ et } b_n = \beta_n(f) \\ a_0 = \frac{\alpha_0(f)}{2},\ b_0 = 0 \end{array}}$$

On a que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et g sa somme.

Alors d'après la question (14), on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \geq 1,\ \alpha_n(g) = a_n \\ \alpha_0(g) = 2a_0 \\ \forall n \geq 1,\ \beta_n(g) = b_n \\ \beta_0(g) = 0 \end{array}}$$

D'où
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \geq 1,\ \alpha_n(g) = \alpha_n(f) \text{ et } \beta_n(g) = \beta_n(f) \\ \alpha_0(g) = \alpha_0(f) \ ;\ \beta_0(f) = \beta_0(g) \end{array}}$$

Car $\beta_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\sin(0)\,dx = 0$ et $\beta_0(g) = 0$.

Enfin : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_n(g)=\alpha_n(f) \text{ et } \beta_n(g)=\beta_n(f)}$

16. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement que $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

Soit $f\in C_{2\pi}$.

Soit g la somme de la série trigonométrique dans la question (15).

Montrons que : $\left(\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g(x)\right)$

Càd que $f-g=0$.

Il suffit de vérifier, vu le résultat admis, que :

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\ f-g\in C_{2\pi} \\ ii)\ \forall n\in\mathbb{N},\ \alpha_n(f-g)=\beta_n(f-g)=0 \end{array}}$$

On a f et $g\in C_{2\pi}$, alors $f-g\in C_{2\pi}$.

Et on a aussi :

$$\alpha_n(f-g) = \frac{1}{\pi}\int^{\pi}(f(x)-g(x))\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx$$

$= \alpha_n(f) - \alpha_n(g)$

$\alpha_n(f-g) = 0$ (car $\alpha_n(f) = \alpha_n(g)$)

De même, on a $\beta_n(f-g) = 0$.

Enfin $\boxed{f-g=0}$.

□

17. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$.

Soit $f \in C_{2\pi}$, paire.

i) $\beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

$= 0$, car la fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire.

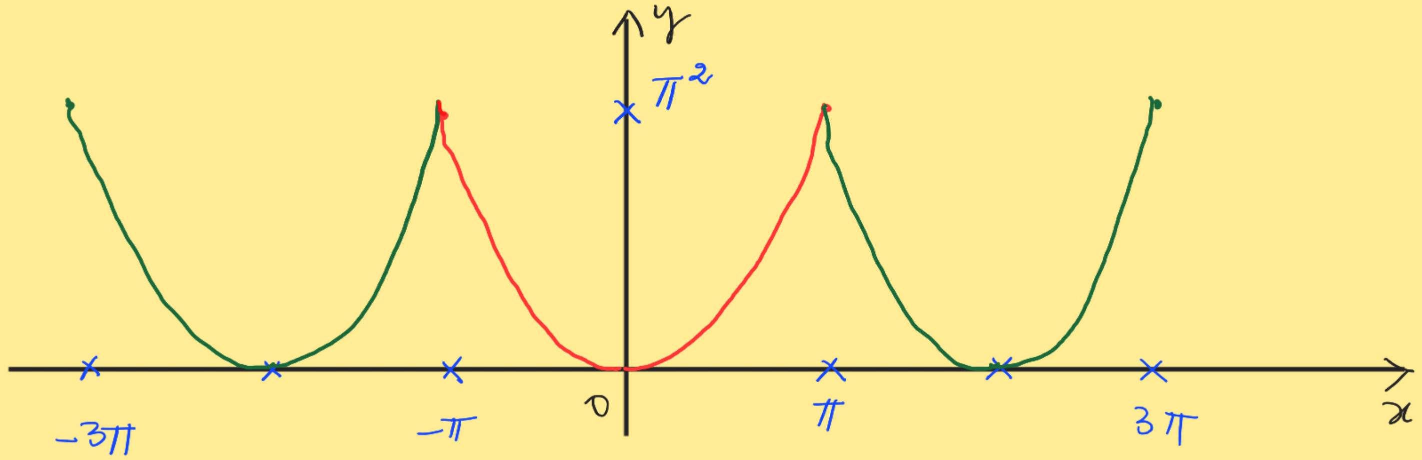
ii) $\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ (là encore, car $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire)

□

18. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

i)



« NB : Le repère n'est pas orthonormé. »

---

ii) $\alpha_n(f) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$ (car f paire)

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx.$$

Si $n \geq 1$

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\underbrace{\left[x^2 \cdot \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} 2x \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\, dx \right) \quad \text{(via une I P Parties)}$$

$$= \frac{-4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{-4}{n\pi} \left(\left[x \cdot \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \overbrace{\int_0^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}\, dx}^{=0} \right) \quad \text{(via une IPP)}$$

D'où : $\boxed{\forall n \geq 1,\ \alpha_n(f) = \frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n}$

Si $n=0$

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\pi^2$$

iii) $\beta_n(f) = 0$ (car f paire)

iv) Donnons une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

On a : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n(f) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n(f) = \frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n \\ \alpha_0(f) = \frac{2}{3}\pi^2 \end{cases}$ ☆

Alors les séries $\sum_n \alpha_n(f)$ et $\sum_n \beta_n(f)$ sont ACV.

D'où la série trigonométrique $\sum_n \left(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, d'après la question 9).

Et d'après la question 16), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)\right)$$

$$\star \Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4.(-1)^n}{n^2} \cos(nx)\right)$$

Et enfin, la série trigonométrique $\left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4.(-1)^n}{n^2} \cos(nx)\right)$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. □

19. En déduire les sommes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Déduire alors de la seconde somme la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = ?$

On a : $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4.(-1)^n}{n^2} \cos(nx)\right)$

$$\Rightarrow \forall x \in [-\pi, \pi],\ x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4.(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Pour $x = 0$, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4.(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}}$$ □

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = ?$

On a : $\left(\forall x \in [-\pi, \pi] ,\ x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cos(nx) \right)$

Et on sait que $(-1)^n = \cos(n\pi)$.

Alors pour $x = \pi$, on obtient :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

D'où : $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$ □

iii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = ?$

On a : $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}_{= \pi^2/6} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Enfin : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1}$ $\square$

---

20. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1[$ puis démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \frac{\pi^2}{12}$.

i) Justifions que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur $]0,1[$.

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est bien continue sur $]0,1]$.

En 0, on a $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

D'où la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur $]0,1[$. $\square$

ii) Montrons que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \frac{\pi^2}{12}$.

On a :

$$\forall x \in]-1,1[, \ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]0,1[, \ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$$

D'où :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx$$

On souhaite intervertir $\int_0^1$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty}$.

Notons $f_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$, pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ Converge Uniformément sur $[0,1]$:

a) $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$ Converge simplement sur $[0,1]$

d'après le critère spécial pour les séries alternées, vu que pour tout $x \in [0,1]$, $\left(\frac{x^{n-1}}{n}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle.

b) M que $(R_n(x))_{n\geq 1}$ Converge Uniformément vers 0 sur $[0,1]$

Soient $n\geq 1$ et $x \in [0,1]$. On a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{k-1}}{k} \right|$$

$$\leq \left| \frac{(-1)^n x^n}{n+1} \right| \quad \text{(la valeur absolue du } 1^{er} \text{ terme je rappelle)}$$

$$= \frac{x}{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad (\text{car } 0 \leq x \leq 1)$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Alors la suite de fonctions $(R_n(x))_{n\geq 1}$ Converge Uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Et puisque pour tout $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1}\dfrac{x^{n-1}}{n}$ est continue sur $[0,1]$.

Alors on peut effectuer l'interversion suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}\, dx \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n^2} \right]_0^1$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{12}$$

$\square$

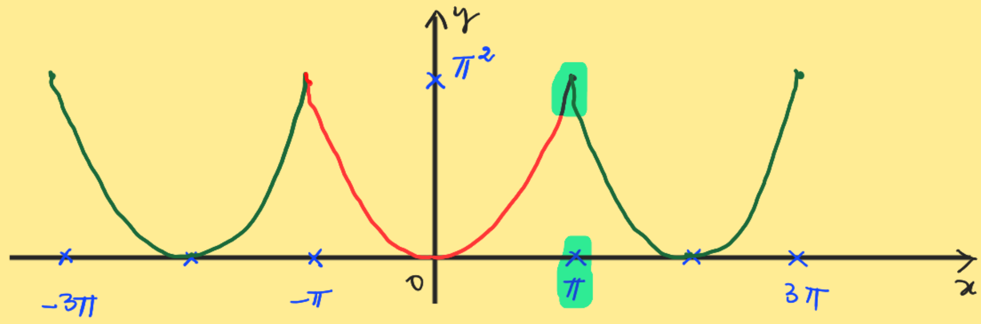
21. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?
Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométriquen$\sum(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

i) Non, la somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ n'est pas forcément dérivable sur $\mathbb{R}$.

Comme contre-exemple, considérons la fonction $f \in C_{2\pi}$ vérifiant :

$$\forall x \in [-\pi,\pi],\ f(x) = x^2$$

vue dans la question 18).



f n'est pas dérivable en π, car $f'_d(\pi) \neq f'_g(\pi)$. En effet :

$(\forall x \in [-\pi,\pi],\ f(x) = x^2) \Rightarrow f'_g(\pi) = 2\pi$

$\forall x \in [\pi, 3\pi],\ f(x) = f(x-2\pi)$ (f 2π-périodique)

$= (x-2\pi)^2$ (car $x-2\pi \in [-\pi,\pi]$)

D'où $f'_d(\pi) = 2(\pi - 2\pi) = -2\pi$

$\square$

ii) Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Notons f la somme de la série trigonométrique $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$.

On veut que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) On a que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x \longmapsto a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ car converge normalement.

c) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))' = \sum\limits_{n\geq 0}(-na_n\cos(nx)+nb_n\sin(nx))$

converge normalement sur $\mathbb{R}$, d'après 9), quand les séries $\sum\limits_n na_n$

et $\sum_n n b_n$ convergent absolument.

Enfin, si les séries $\sum_n n a_n$ et $\sum_n n b_n$ convergent absolument alors la somme f de la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (même de classe C^1).

$\square$

22. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n}\cos(nx)$.

Observons que $\frac{n}{3^n}\cos(nx) = \left(\frac{\sin(nx)}{3^n}\right)'$.

On a d'après 5) que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin x}{10-6\cos x}$$

Et on a que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0}\frac{\sin(nx)}{3^n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

En plus, les deux séries $\sum_n \frac{n}{3^n}$ et $\sum_n n.0$ sont absolument convergentes.

(la 1ère via D'Alembert par exemple).

D'où, d'après la question 21), et d'après le théorème de dérivation terme à terme, on a que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n} = \left(\frac{3\sin x}{10-6\cos x}\right)'$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5\cos x - 3}{(5-3\cos x)^2}}$$

Fin Correction