



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS - PSL,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2026

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

EXTRAIT

- Les lettres $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres réels.

I - Lemme fondamental du calcul variationnel

Soient $a, b \in \mathbf{R}$ deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbf{R})$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$, on a :

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0.$$

Le but de cette partie est de montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

Soit la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

- 1 ▷ Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n définie sur $\mathbf{R}_+^*$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}.$$

- 2 ▷ En déduire que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

- 3 ▷ Soient $c < d$ deux réels. Construire une fonction $\psi_{c,d}$ définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, telle que $\psi_{c,d}(x) > 0$ pour tout $x \in]c, d[$ et $\psi_{c,d}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus]c, d[$.

- 4 ▷ En déduire que f est nulle sur $[a, b]$.

Fin