

Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2002 - Epreuve spécifique -

Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

Problème 2

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$. On a donc, pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{k^p}.$$

Il suffit d'intégrer cette inégalité entre k et $k+1$ pour obtenir le résultat.

2. On somme les inégalités précédentes pour k allant de 1 à $n-1$, et on utilise la relation de Chasles pour simplifier la somme d'intégrales.
3. Si $p \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \int_1^X \frac{dx}{x^p} &= \left[\frac{1}{-p+1} \frac{1}{x^{p-1}} \right]_1^X \\ &= \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{X^{p-1}} \right). \end{aligned}$$

Cette quantité admet une limite ($= \frac{1}{p-1}$) si $X \rightarrow +\infty$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

Si $p = 1$, on a cette fois :

$$\int_1^X \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^X = \ln X \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty.$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est donc pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

4. Si $p = 1$, la partie droite de l'inégalité obtenue en 2. prouve que $(S_n(1))$ tend vers $+\infty$ si $n \rightarrow +\infty$.
Si $p = 2$, on remarque que la suite $(S_n(p))_{n \geq 1}$ est une suite croissante, et la partie gauche de l'inégalité obtenue en 2. couplée avec le résultat précédent entraîne que cette suite est bornée. Donc elle converge.

5. Il faut être précis dans la rédaction. On a successivement :

- φ est C^1 sur $]0, \pi]$, et pour tout $t \in]0, \pi]$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\left(-1 + \frac{t}{\pi}\right) 2 \sin(t/2) - \cos(t/2)(t^2/2\pi - t)}{4 \sin^2(t/2)}.$$

- Si $t \neq 0$, on a :

$$\varphi(t) \sim_0 \frac{-t}{t} = -1.$$

On en déduit que φ est continue en 0, et $\varphi(0) = -1$.

- On effectue un développement limité pour étudier le comportement de φ' au voisinage de 0 :

$$\left(-1 + \frac{t}{\pi}\right) 2 \sin(t/2) = \left(-1 + \frac{t}{\pi}\right) (t + o(t^2)) = -t + \frac{t^2}{\pi} + o(t^2).$$

$$\cos(t/2)(t^2/2\pi - t) = (1 - t^2/4 + o(t^2))(t^2/2\pi - t) = -t + t^2/2\pi.$$

On en déduit

$$\varphi'(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} + o(t^2)}{t^2 + o(t^2)}$$

On en déduit que $\varphi'(t)$ tend vers $\frac{1}{2\pi}$ si t tend vers 0. De cela, on tire à la fois que φ' est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = \frac{1}{2\pi}$, et que φ' est continue en 0.

En conclusion, φ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

6. Il faut intégrer par parties (deux fois)!

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt &= - \int_0^\pi \frac{1}{k} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(kt) dt + \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{1}{k} \sin kt \right]_0^\pi \\
 &= - \int_0^\pi \frac{1}{k^2} \times \frac{1}{\pi} \cos(kt) dt + \left[\frac{1}{k^2} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \cos kt \right]_0^\pi \\
 &= \frac{1}{k^2}.
 \end{aligned}$$

7. C'est très classique! On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n \Re(e^{ikt}) = \Re \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right) \\
 &= \Re \left(\sum_{k=1}^n (e^{it})^k \right) \\
 &= \Re \left(\frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \right) \\
 &= \Re \left(\frac{e^{i\frac{n+2}{2}t} (e^{-i\frac{n}{2}t} - e^{i\frac{n}{2}t})}{e^{it/2} (e^{-it/2} - e^{it/2})} \right) \\
 &= \Re \left(e^{i\frac{n+1}{2}t} \frac{\sin nt/2}{\sin t/2} \right) \\
 &= \cos \left(\frac{n+1}{2}t \right) \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}.
 \end{aligned}$$

Il faut ensuite se souvenir des formules de trigonométrie, et notamment de :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b)).$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{2}.$$

8. Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi \psi(t) \sin((n+1/2)t) dt &= \left[-\frac{\psi(t) \cos((n+1/2)t)}{n+1/2} \right]_0^\pi + \frac{1}{n+1/2} \int_0^\pi \psi'(t) \cos((n+1/2)t) dt \\
 &= \frac{\psi(0)}{n+1/2} + \frac{1}{n+1/2} \int_0^\pi \psi'(t) \cos((n+1/2)t) dt
 \end{aligned}$$

Puisque ψ est de classe C^1 , il est possible de trouver une constante M telle que $|\psi(t)| \leq M$ et $|\psi'(t)| \leq M$ si $t \in [0, \pi]$. On a alors d'une part :

$$\left| \frac{\psi(0)}{n+1/2} \right| \leq \frac{M}{n+1/2}$$

et d'autre part :

$$\left| \frac{1}{n+1/2} \int_0^\pi \psi'(t) \cos((n+1/2)t) dt \right| \leq \frac{\pi M}{n+1/2}.$$

Ceci prouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi(t) \sin((n+1/2)t) dt = 0.$$

- 9.** Il faut résumer nos connaissances! Bien sûr, il faut approcher $\zeta(2)$ par la suite $(S_n(2))$. Mais par la question 6. :

$$\begin{aligned} S_n(2) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt. \end{aligned}$$

On introduit maintenant 7.

$$S_n(2) = \int_0^\pi \varphi(t) \sin((n+1/2)t) - \int_0^\pi \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt.$$

Il suffit ensuite de faire tendre n vers $+\infty$, et d'appliquer 8 et 5. On a alors :

$$\zeta(2) = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt = \frac{\pi^2}{6}.$$

- 10.a.** Par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} x^n(1-x)^n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{n+k} \\ &= \sum_{i=n}^{2n} (-1)^{i-n} C_n^{i-n} x^i. \end{aligned}$$

- 10.b.** Si $k < n$ ou $k > 2n$, la forme précédente entraîne que $f_n^{(k)}(0) = 0$. Si $n \leq k \leq 2n$, on a :

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \times k! e_k,$$

qui est un entier (car $n!$ divise $k!$). Puisque $f_n^{(k)}(1-x) = (-1)^k f_n^{(k)}(x)$, on en déduit que $f_n^{(k)}(1)$ est entier.

- 11.a.** Pour $k \leq n$, $b^n \pi^{2k}$ est un entier, et on déduit du résultat de la question précédente que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont entiers.

- 11.b.** On a :

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= F''_n(x) \sin(\pi x) + \pi F'_n(x) \cos(\pi x) - \pi F'_n(x) \cos(\pi x) + \pi^2 F_n(x) \sin(\pi x) \\ &= b^n \left(\pi^{2n} f''_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \dots + (-1)^{n-1} f_n^{(2n)}(x) \right) \sin(\pi x) \\ &\quad + b^n \left(\pi^{2n+2} f_n(x) - \pi^{2n} f''_n(x) + \dots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right) \sin(\pi x) \\ &= b^n \pi^{2n+2} f_n(x) \\ &= \pi^2 a^n f_n(x) \sin(\pi x). \end{aligned}$$

On a alors :

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^1 g'_n(x) dx = F_n(1) + F_n(0) \in \mathbb{Z}.$$

12.a. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \rightarrow 0.$$

En particulier, il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \implies \frac{a}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. D'où, si $n > n_0$:

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0}.$$

On obtient alors :

$$|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

12.b. Il s'agit d'une conséquence immédiate du résultat précédent.

12.c. Si $x \in [0,1]$, on a aussi $(1-x) \in [0,1]$ et $|x^n| \leq 1$, $|(1-x)^n| \leq 1$.

12.d. Remarquons que la fonction $x \mapsto \pi a^n f_n(x) \sin(\pi x)$ est une fonction continue strictement positive sur $]0,1[$. On a donc $A_n > 0$. D'autre part, si $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{aligned} A_n &\leq \pi \int_0^1 \frac{a^n}{n!} \sin(\pi x) dx \\ &\leq \pi \frac{a^n}{n!} \frac{2}{\pi} < 1 \end{aligned}$$

En particulier, $A_n \in]0,1[$. Mais, on a prouvé à la question 11.b. que A_n devrait être entier. C'est donc que l'hypothèse de départ est fausse, et π^2 est irrationnel.

12.e. Si π était rationnel, $\pi = c/d$, l'élévation au carré prouverait que π^2 serait rationnel. π est donc irrationnel.

Pour information : Contrairement à ce qu'a écrit l'auteur du problème, on connaît désormais quelques informations sur l'irrationalité des $\zeta(p)$, pour les entiers impairs $p \geq 5$. En particulier, un jeune mathématicien français, Rivoal, a prouvé en 2001 qu'il existait une infinité de valeurs de p pour lesquelles $\zeta(p)$ est irrationnel.

FIN
