Quiz :

Nature des séries numériques suivantes ?

1) $\sum_n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

2) $\sum_n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

4) $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

5) $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

Scanned with CamScanner

Rép

1) $\sum_n \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$?

$\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$

$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$

Or $\sum \frac{-1}{n}$ Diverg. (Riem $\alpha = 1 \leq 1$)

Alors $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ Div

Rappel : Si $U_n \sim V_n$ et que U_n de signe constant (≥ 0 ou ≤ 0)

Alors : $\boxed{\begin{array}{l} \sum U_n \text{ CV} \Leftrightarrow \sum V_n \text{ CV} \\ \sum U_n \text{ Div} \Leftrightarrow \sum V_n \text{ Div} \end{array}}$

de Même Nature.

2) $\sum_{n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$?

$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

Or $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ DIV $\left(\begin{array}{l}\text{Rim} \\ \alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1\end{array}\right)$

D'où $\sum \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ DIV

3) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$?

Ça converge d'après le critère de Leibnitz pour les séries alternées

vu que $\left(\frac{1}{n}\right) \searrow$

et $\lim \frac{1}{n} = 0$

Rappel)

« Critère de Leibniz pour les séries alternées :

Si $(\alpha_n) \searrow$ et $\lim \alpha_n = 0$

Alors $\sum (-1)^n \alpha_n$ CV »

4) $\displaystyle\sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$?

Une erreur commune à éviter !!

«

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n}$$

car $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$

$((-1)^n)$ bornée

et $\lim \frac{1}{n} = 0$

$\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$

Or $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (Leibniz ...)

D'où $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge

$\square$

»

non respectée

Rappel Si $U_n \sim V_n$ et que U_n de signe constant (≥ 0 ou ≤ 0)

Alors : $\boxed{\begin{array}{l} \sum U_n \ CV \Leftrightarrow \sum V_n \ CV \\ \sum U_n \ Div \Leftrightarrow \sum V_n \ Div \end{array}}$

↓ Même Nature

$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ n'est pas de signe constant

4) $\sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$?

Une erreur commune à éviter

OK $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n}$

car $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$

$((-1)^n)$ bornée

et $\lim \frac{1}{n} = 0$

$\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$

OK Or $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (Leibniz ⋮)

~~Donc $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge~~

4) $\sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$?

Via les Dév limités :

$$\ln(1+t) \underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{CV} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}}_{CV} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{CV}$$

Or : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (Leibniz)

$\sum -\frac{1}{2n^2}$ CV (Riemann)

$\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV (car $\sum \frac{1}{n^2}$ CV)

détails

Si $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors $\sum u_n$ CV

$\Downarrow$

$\boxed{\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ CV}}$

D'où leur somme CV

C-à-d $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ CV

$\boxed{\text{fin}}$

4) $\sum_n \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$?

Via les Dév limités :

$$\ln(1+t) \underset{t\to 0}{=} t + O(t^2)$$

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{CV} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{CV}$$

Or : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (Leibn)

et $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV $\left(\text{car } \sum \frac{1}{n^2} \text{ CV}\right)$

Si $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

alors $\sum v_n$ CV

$\Downarrow$

$$\boxed{\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right) CV}$$

détails

D'où leur somme CV

C àd $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ CV

$\boxed{\text{fin}}$

Jolie Piste

Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$?

Solution (jolie) :

On a :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$$

à signe constant

Or $\sum \frac{-1}{2n^2}$ CV

Alors $\sum \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n}\right)$ CV

Et puisque $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, alors par sommation $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge

$\square$

4

Scanned with CamScanner

1) Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

2) Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$?

où $\alpha > 0$

3) Nature de $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$?

Scanned with CamScanner

Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

Solution (jolie) :

On a :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\text{S!}\left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

à signe constant

Or $\sum \frac{-1}{2n}$ Div

Alors $\sum \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ Div

Et puisque $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, alors par Sommation $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ Diverge

D

2) Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$?

où $\alpha > 0$

$$\ln(1+t) - t \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}$$

$t \underset{=}{\text{ici}} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \to 0$ car $\alpha > 0$

Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$? (où $\alpha > 0$)

Solution (jolie) :

On a :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

$$S! \left(\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$$

à signe constant

Et on a : $\sum \frac{-1}{2n^{2\alpha}}$ CV $\iff \alpha > \frac{1}{2}$

$- - -$ Div $\iff \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Cas 1 : Si $\alpha > \frac{1}{2}$:

⋮ bla bla bla

Cas 2 : Si $0 < \alpha \leq 1/2$

⋮ bla bla...

$\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \searrow$ car $\alpha > 0$ $\to 0$

) Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$?

où $\alpha > 0$

3) Nature de $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$?

4) ... $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$?

5) ... $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$? où $\alpha > 0$

Scanned with CamScanner

3) Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \underset{n}{\sim} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \Bigg\| \qquad (n+(-1)^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

$$\left(\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \, ?$$

$$\left(\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{-1}{n\underbrace{(n+(-1)^n)}_{\sim n}} \sim \frac{-1}{n^2}$$

Série convergente

1) Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

2) Nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$?

où $\alpha > 0$

3) Nature de $\sum_n \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$?

4) ... $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$?

5) ... $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$? où $\alpha > 0$