

Quest.:

Nature des séries numériques suivantes ?

$$1) \sum_n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$2) \sum_n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$3) \sum_n \frac{(-1)^n}{n}$$

$$4) \sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$5) \sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Réponse

$$1) \sum_n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) ?$$

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-1}{n}$$

$$\ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$$

Or $\sum \frac{-1}{n}$ Diverge. (Rien $\alpha = 1 \leq 1$)

Abs $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ Div \circ

Rappel Si $U_n \sim V_n$ et que U_n de signe constant ($\begin{matrix} > 0 \\ \text{ou} \\ < 0 \end{matrix}$)

$$\text{Abs: } \begin{cases} \sum U_n CV \Leftrightarrow \sum V_n CV \\ \sum U_n \text{Div} \Leftrightarrow \sum V_n \text{Div} \end{cases}$$

de Même Nature.

$$2) \sum_n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) ?$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{Or } \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ DIV } \left(\begin{array}{l} \text{Rim} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Don't } \sum \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ DIV}$$

$$3) \sum \frac{(-1)^n}{n} ?$$

ça converge d'après

le critère de Leibniz

pour les séries alternées

$$\text{vu que } \left(\frac{1}{n}\right) \downarrow$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

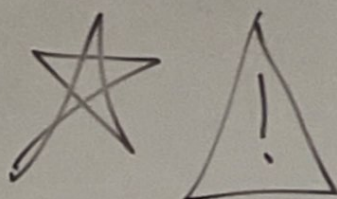
Rappel

↳ Critère de Leibniz pour les séries alternées :

$$\text{Si } (d_n) \downarrow \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

$$\text{Alors } \sum (-1)^n d_n \text{ CV}$$

$$4) \sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) ?$$



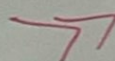
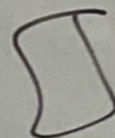
Une erreur commune présente

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n}$$

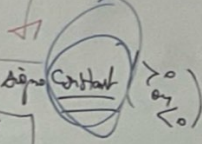
$$\text{On a } \sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ CR (Leibniz)}$$

car $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$
 $(-1)^n$ bornée
 et $\frac{1}{n} \searrow$
alors
 $\ln(1+t) \sim t$
 $t \rightarrow 0$

$$\text{Donc } \sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \text{ converge}$$



Non respectée



Requel Si $U_n \sim V_n$ et que U_n de signe constant $\begin{pmatrix} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{pmatrix}$
Alors: $\sum U_n CV \Leftrightarrow \sum V_n CV$
 $\sum U_n Div \Leftrightarrow \sum V_n Div$
↓ Même Nature

$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ n' est pas de signe constant

4) $\sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$? ★ !

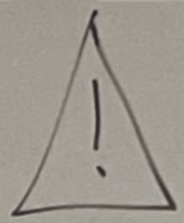
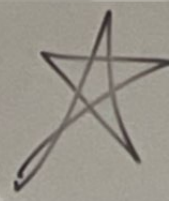
Une erreur commune triviale !!

OK $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n}$ Car $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$
 $\frac{(-1)^n}{n}$ borné
et $\ln \frac{1}{1+x} \sim -x$

OK $\sum \frac{(-1)^n}{n} CV$ (Leibniz)

~~Donc $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge~~

$$4) \sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) ?$$



via la Développement :

$$\ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{CV} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}}_{CV} + o\left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{CV}\right)$$

Gr: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (Leibniz)

$\sum \frac{1}{2n^2}$ CV (Riemann)

$\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ CV

Donc leur somme CV

C'est $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ CV

fin

Si $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
alors $\sum u_n$ CV

$\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ CV

details

$$4) \sum_n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) ?$$

Via le Développement limité :

$$\ln(1+t) \underset{t \rightarrow 0}{=} t + O(t^2)$$

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{CV} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{CV}$$

Or : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ CV (Léibniz)

et $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right) CV \left(\sum \frac{1}{n^2} CV \right)$

Donc leur somme CV

C'est $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) CV$

fin

Si $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
alors $\sum u_n CV$

$\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right) CV$

details

JOLIE Piste

Nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$?

On a : Solution (jolie)

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\S \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$$\frac{1}{2n^2}$$

à signe
Constant

$$\text{Or } \sum \frac{1}{2n^2} \text{ CV}$$

$$\text{Alors } \sum \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) - \frac{(-1)^n}{n} \right) \text{ CV}$$

Et puisque $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, alors par

Somme $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge \triangle

1) Nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

2) Nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$?

où $\alpha > 0$

3) Nature de $\sum_n \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$?

Nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

On a : Solution (jolie)

$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \sim -\frac{1}{2n}$

à signe constant

Or $\sum \frac{-1}{2n}$ Div

Alors $\sum \left(\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ Div

Et puisque $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ Converge, alors par

Sommation $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ Diverge Δ

2) Nature de $\int \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) ?$

ou $\alpha > 0$

$$\ln(1+t) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2}$$

$$t \sim_{|s|} \frac{(-1)^n}{n^d}$$

car $d > 1$
 $\rightarrow 0$

Nature de $\sum \ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^d})$? (où $d > 0$)

Solution (jolie) \prod

$$\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^d}) \sim \frac{(-1)^n}{n^d}$$

$$\prod \left(\ln(1 + \frac{(-1)^n}{n^d}) - \frac{(-1)^n}{n^d} \right)$$

à signe constant

$$\frac{1}{2n^{2d}}$$

Et on a: $\sum \frac{-1}{2n^{2d}} \text{ CV } \Leftrightarrow d > \frac{1}{2}$

--- Diverge $\Leftrightarrow d \leq \frac{1}{2}$

Case 1: Si $d > \frac{1}{2}$:

o
o
o $b_n b_n b_n$

Case 2: Si $0 < d \leq \frac{1}{2}$

o
o
o $b_n b_n \dots$

$$\left(\frac{1}{n^d} \right) \xrightarrow{\text{car } d > 0} 0$$

1) Nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$?

où $\alpha > 0$

3) Nature de $\sum_n \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$?

2) ... $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$?

5) ... $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$? où $\alpha > 0$

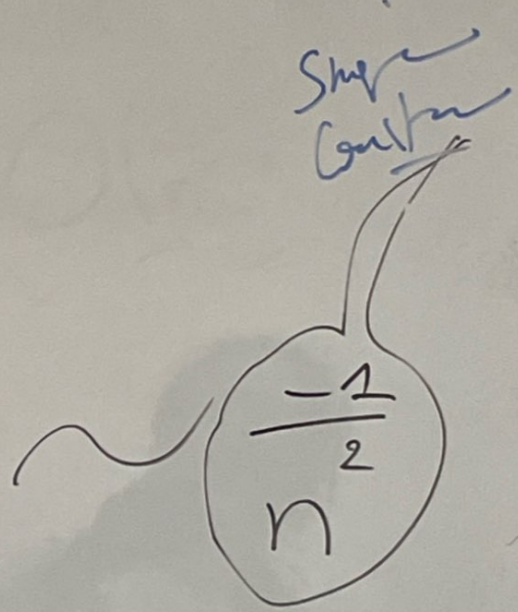
3) Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} \sim_n \frac{(-1)^n}{n} \quad \left| \quad (n+(-1)^n) \sim_n n \right.$$

$$\left(\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n} \right) \sim ?$$

$$\left(\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n} \right) = \frac{-1}{n(n+(-1)^n)}$$

\sim_n



o
p
b

1) Nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$?

2) Nature de $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$?

où $\alpha > 0$

3) Nature de $\sum_n \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$?

4) ... $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$?

5) ... $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$? où $\alpha > 0$