

EPREUVE DES PETITES MINES, MPSI, 1998

EXTRAIT

Deuxième problème

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle et rapporté à sa base canonique (orthonormée directe) notée (e_1, e_2, e_3) .

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la $\mathbb{R}$ -alge des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ -alge des matrices d'ordre 3 à coefficients réels, et I_3 la matrice identité.

Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice :

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

- Montrer que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- Soient $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, -2)$.
 - Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - Déterminer la matrice S' de s dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) .
 - Calculer $(S')^n$ et donner une méthode de calcul de S^n (on ne demandera pas d'effectuer lesdits calculs).
- La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
 - Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S .
 - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que :

$$S^n = a_n I_3 + b_n S$$

On convient que : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad M^0 = I_3$.

- Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 , et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
 - Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
 - En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $B = S - 2I_3$.
 - Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
 - En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$ (On pourra, après justification, utiliser la formule du binôme de Newton).
 - Comparer avec le résultat de la question 3).
 - L'expression de S^n obtenue aux questions 3) et 4) est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. On pose $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

- Calculer U ; vérifier que u est une rotation vectorielle et que $u \circ s = s \circ u = f$.
- Soit (e''_1, e''_2, e''_3) la famille obtenue en normant les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 de la question 2) de la première partie.
 - Montrer que (e''_1, e''_2, e''_3) est une base orthonormale directe.

- (b) Écrire la matrice U' de u dans cette base et caractériser géométriquement u .
3. (a) Exprimer la matrice de s dans la base (e_1'', e_2'', e_3'') en fonction de S' .
 (b) En déduire la matrice de f dans la base (e_1'', e_2'', e_3'') .
4. (a) Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?
 (b) Soit $P = \text{Vect}(e_2'', e_3'')$.
 i. Montrer que $f(P) = P$.
 ii. Soit g l'endomorphisme de P tel que pour tout x de P , $g(x) = f(x)$. Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on reconnaîtra.
5. On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $f \circ g = g \circ f$.
- (a) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
- (b) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.
 i. Montrer que le vecteur $g(e_1'')$ est invariant par f . Que peut-on en déduire?
 ii. Soit M la matrice de g dans la base (e_1'', e_2'', e_3'') . Montrer que M commute avec $(S')^3$.
 iii. En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{C}(f)$ dans la base (e_1'', e_2'', e_3'') .
- (c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$?

FIN EXTRAIT

