

Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2002 - Epreuve spécifique - Corrigé

Cette correction a été rédigée par Frédéric Bayart. Si vous avez des remarques à faire, ou pour signaler des erreurs, n'hésitez pas à écrire à : mathweb@free.fr

CORRECTION

Problème 1

1. $\sim$ est :

- réflexive : $A = I^{-1}AI$.
- symétrique : $A = P^{-1}BP \iff PAP^{-1} = B \iff B = Q^{-1}AQ$, avec $Q = P^{-1}$.
- transitive : si $A = P^{-1}BP$ et $B = Q^{-1}CQ$, alors $A = (QP)^{-1}C(QP)$, et $PQ \in GL_3(\mathbb{R})$ (ce dernier ensemble est un groupe).

2. On rappelle que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Donc, si A est semblable à B , $A = P^{-1}BP$, on a :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) \\ &= \det(B).\end{aligned}$$

Deux matrices qui ont des déterminants distincts ne sont pas semblables (on dit que le déterminant est un invariant de similitude).

3.a. Soit $y \in \text{Im}(w)$. Il existe x dans $\ker u^{i+j}$ tel que $y = u^j(x)$. Mais alors, $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0$, et donc $\text{Im}(w) \subset \ker u^i$.

3.b. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(w)) + \dim(\ker w) = \dim(\ker u^{i+j}).$$

Puisque $\dim(\text{Im}(w)) \leq \dim(\ker u^i)$ et $\dim(\ker w) \leq \dim(\ker u^j)$ (il est facile de constater que $\ker w \subset \ker u^j$), on a le résultat.

4.a. On applique 3.b. pour $i = 2, j = 1$:

$$3 = \dim(\ker u^3) \leq \dim(\ker u) + \dim(\ker u^2).$$

Par le théorème du rang, $\dim(\ker u) = 1$, et $\dim(\ker u^2) \geq 2$. On applique ensuite 3.b. pour $i = j = 1$:

$$\dim(\ker u^2) \leq \dim(\ker u) + \dim(\ker u) = 2.$$

- 4.b.** D'après la question précédente, $u^2 \neq 0$, et il existe a de E tel que $u^2(a) \neq 0$. Montrons que la famille $(a, u(a), u^2(a))$ est libre : si on avait une égalité du type

$$\lambda_0 a + \lambda_1 u(a) + \lambda_2 u^2(a) = 0,$$

on compose d'abord par u^2 :

$$\lambda_0 u^2(a) = 0 \implies \lambda_0 = 0.$$

Puis on compose par u :

$$\lambda_1 u^2(a) = 0 \implies \lambda_1 = 0.$$

On obtient aussi finalement $\lambda_2 = 0$. Puisque E est de dimension 3, la famille $(a, u(a), u^2(a))$ est a fortiori une base.

- 4.c.** On a :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 5.a.** Puisque $u \neq 0$ (son rang n'est pas nul), il existe b de E tel que $u(b) \neq 0$.

- 5.b.** Puisque $\ker u$ est de dimension 2, il existe c vecteur de $\ker u$ non colinéaire à $u(b)$ et donc $(u(b), c)$ est une famille libre de $\ker u$. Il suffit ensuite de prouver que $(b, u(b), c)$ est libre : si on a une égalité du type

$$\lambda_0 b + \lambda_1 u(b) + \lambda_2 c = 0,$$

on compose par u pour obtenir

$$\lambda_0 u(b) = 0 \implies \lambda_0 = 0.$$

Puisque $(u(b), c)$ est libre, on en déduit ensuite que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. $(b, u(b), c)$ est bien une base de E .

- 5.c.** On a :

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 6.** A est inversible car son déterminant est le même que celui de la matrice T (cf question 2.), et vaut donc 1.

- 7.** On a :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

On a alors : $P^{-1}A^{-1}P = T^{-1} = (I_3 + N)^{-1}$. Or,

$$(I_3 - N + N^2)(I_3 + N) = (I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N^3 = I_3.$$

Ceci prouve que

$$(I_3 + N)^{-1} = I_3 - N + N^2,$$

ce qui à son tour donne le résultat demandé.

- 8.** A et A^{-1} sont alors toutes les deux semblables à I_3 . Comme être semblable est une relation d'équivalence, elles sont semblables.

- 9.a.** Soit u l'endomorphisme associé à N dans la base canonique. D'après la question 4., il existe une base de E telle que la matrice de u dans cette base est :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut car deux matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes sont semblables (cf le théorème sur les effets d'un changement de base sur un endomorphisme). Une matrice semblable à M est alors :

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 9.b.** En utilisant la formule du binôme de Newton (les matrices N et N^2 commutent), on vérifie aisément que $M^3 = 0$. En outre, le rang de M est aussi le rang de V et vaut donc 2.
- 9.c.** Puisque le rang de M est 2, et $M^3 = 0$, le même raisonnement que celui effectué pour N prouve que M est semblable à U . Comme on a déjà prouvé que N est semblable à U , M et N sont semblables.
- 9.d.** Soit Q tel que $Q^{-1}MQ = N$. On a :

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= I_3 + N \\ &= I_3 + Q^{-1}MQ \\ &= Q^{-1}(I_3 + M)Q \\ &= Q^{-1}P^{-1}A^{-1}PQ. \end{aligned}$$

A et A^{-1} sont semblables.

- 10.** Inspirés par la question 9., on vérifie que $M = N^2 - N$ est de rang 1, et vérifie $M^2 = 0$. On prouve alors que M et N sont toutes semblables à la matrice U' , et donc semblables l'une à l'autre. On conclut comme à la question 9.d.
- 11.a.** Bien sûr, le noyau d'un endomorphisme de E est un sous-vectoriel de E . On a :

$$\begin{aligned} xa + yb + zc \in \ker(u - id_E) &\iff \begin{cases} -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff y + z = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -y \end{cases} \end{aligned}$$

$\ker(u - id_E)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2, dont une base est donnée par (e_1, e_2) avec $e_1 = a$ et $e_2 = b - c$.

- 11.b.** (e_1, e_2, c) est une base de E , car on peut vérifier aisément que c'est une famille libre (on peut aussi calculer le déterminant de cette famille dans la base (a, b, c) et vérifier qu'il est non nul - il fait 1). On a :

$$u(e_1) = e_1, u(e_2) = e_2, u(c) = -b + 2c = -e_2 + c.$$

Dans la nouvelle base, la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 11.c.** La matrice A est une matrice semblable à une matrice du type T : elle est donc semblable à son inverse.
- 12.** Non! On peut par exemple choisir $A = -I_3$. On a alors $A^{-1} = A = I_3$, et $A \sim A^{-1}$. Pourtant, A n'est pas semblable à une matrice de type T car elles n'ont pas le même déterminant.

FIN
