

CONCOURS COMMUN SUP 2002

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Extrait

Épreuve de Mathématiques (toutes filières)

Mardi 21 mai 2002 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats :

- doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4,
- sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées,
- colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette à code à barres correspondante.

PROBLEME D' ANALYSE

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(0) = 1$ et $\forall t \neq 0, f(t) = \frac{\text{Arctan}(t)}{t}$.

1.1 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

1.2 Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(t)$ au voisinage de 0. En déduire que f est dérivable en 0, et donner $f'(0)$.

1.3 Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(t)$, pour $t \in \mathbb{R}^*$.

1.4 A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \int_0^t \frac{w^2}{(1+w^2)^2} dw = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$.

En déduire le sens de variation de f .

1.5 Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

(On ne demande pas l'étude des points d'inflexion)

2. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\phi(0) = 1$ et $\forall x \neq 0, \phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

2.1 Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.

2.2 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq \phi(x) \leq 1$. (on pourra commencer par supposer $x > 0$)

2.3 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x))$.

Montrer que ϕ est dérivable en 0, avec $\phi'(0) = 0$. Donner les variations de ϕ .

2.4 Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$.

2.5 Tracer la courbe représentative de ϕ dans le même repère que celle de f .

(On ne demande pas l'étude des points d'inflexions)

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N} : u_{n+1} = \phi(u_n)$, où ϕ est l'application du 2).

3.1 Montrer que : $\forall t \geq 0, 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.

3.2 Montrer que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$. (On pourra

utiliser 2.2 et 2.3). En déduire que, pour tout x strictement positif : $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$, et que cette inégalité reste vérifiée pour tout x de $\mathbb{R}$.

3.3 Montrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}, \phi(x) = x$ admet une unique solution. On note α cette solution.

Montrer que $\alpha \in]0; 1]$.

3.4 Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

En déduire que (u_n) est convergente, et préciser sa limite.

4. On considère l'équation différentielle : $x^2 y' + xy = \text{Arctan}(x)$.

4.1 Résoudre cette équation différentielle sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

4.2 Montrer que ϕ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.



FIN