Chap 2

Réduction d'endomorphismes et de matrices

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Sous-espaces stables – Endomorphisme induit

1) Sous-espaces stables

Déf 1 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E.

F est dit stable par f si et ssi :

$$\boxed{\forall x \in F,\ f(x) \in F}$$

NB Ça veut dire encore que : $f(F) \subset F$

Prop 2 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F sev de E.

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On a :

$$\boxed{(F \text{ stable par } f) \Leftrightarrow (\forall i \in [\![1, p]\!],\ f(e_i) \in F)}$$

Démo

$(\Longrightarrow)$ Evident

$(\Longleftarrow)$ Supp que : $(\forall i \in [\![1, p]\!],\ f(e_i) \in F)$

Mq que : $(F \text{ stable par } f)$

Soit alors $x \in F$. Mq que $f(x) \in F$.

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \ x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

d'où $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(e_i)$ (car f linéaire)

Or $\begin{pmatrix} \forall i, \ f(e_i) \in F \\ F \text{ sev de } E \end{pmatrix}$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \in F$ $\square$

Corollaire 3

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $e \in E \setminus \{0\}$. On a :

$$\boxed{\left(\text{vect}(e) \text{ stable par } f\right) \Longleftrightarrow \left(\exists \lambda \in \mathbb{K}, \ f(e) = \lambda e\right)}$$

Démo

vect(e) stable par f $\Longleftrightarrow f(e) \in \text{vect}(e)$ (car (e) base de vect(e))

$\Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, \ f(e) = \lambda e$

Prop 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

L'intersection (resp la somme) de deux sev stables par f est un sev stable par f.

Démo

Soient F et G deux sev stables par f.

$F \cap G$ et $F + G$ sont stables par f :

(Facile) ; (il suffit d'écrire)

Prop 5

Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$.

1) $\mathrm{Im}(f)$, $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f-\lambda I_E)$ et $\ker(f-\lambda I_E)$ sont stables par f.

2) Si $fg = gf$ alors $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont stables par g.

Démo

1) i) $\mathrm{Im}(f)$ stable par f ?

Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$

ii) $\ker(f)$ stable par f ?

Soit $x \in \ker(f)$, $f(x) = 0 \in \ker(f)$

iii) $\mathrm{Im}(f-\lambda I_E)$ stable par f ?

Soit $x \in \mathrm{Im}(f-\lambda I_E)$. Mq que $f(x) \in \mathrm{Im}(f-\lambda I_E)$.

$\left(\exists t \in E,\ x = (f-\lambda I_E)(t) = f(t) - \lambda t\right)$

$\Rightarrow f(x) = f^2(t) - \lambda f(t) = (f-\lambda I_E)(f(t)) \in \mathrm{Im}(f-\lambda I_E)$.

iv) $\ker(f-\lambda I_E)$ stable par f ?

Soit $x \in \ker(f-\lambda I_E)$. Mq que $f(x) \in \ker(f-\lambda I_E)$.

$x \in \ker(f-\lambda I_E) \Leftrightarrow (f-\lambda I_E)(x) = 0$

$$\begin{aligned}(f-\lambda I_E)(f(x)) &= f^2(x) - \lambda f(x) \\ &= f\big(\underbrace{(f-\lambda I_E)(x)}_{=0}\big) \\ &= f(0) = 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x) \in \ker(f-\lambda I_E)$.

2) Supposons que $f\circ g = g\circ f$.

i) $\ker(f)$ stable par g ?

Soit $x\in\ker(f)$. Mq que $g(x)\in\ker(f)$.

On a $f(x)=0$ et on veut m que $f(g(x))=0$.

On a :

$$f(g(x)) = g(f(x)) \quad (\text{car } f\circ g = g\circ f)$$
$$= g(0) = 0$$

ii) $\mathrm{Im}(f)$ stable par g ?

Soit $x\in\mathrm{Im}(f)$. Mq que $g(x)\in\mathrm{Im}(f)$.

$x\in\mathrm{Im}(f) \Rightarrow (\exists t\in E,\ x=f(t))$

$$g(x) = g(f(t)) \underset{f\circ g = g\circ f}{=} f(g(t)) \in \mathrm{Im}(f)$$

2) Interprétation matricielle de la stabilité

Ici E sera de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$.

Prop 1

Soient F et G deux sev supplémentaires de E ($E=F\oplus G$).
Soit $\mathcal{B}=\mathcal{B}_F\cup\mathcal{B}_G$ une base adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) F stable par f.

2) $\underset{\mathcal{B}}{\mathrm{mat}}(f)$ est de la forme : $\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$

Démo

Notons : $\dim(E)=n$

$\mathcal{B}_F=(e_1,\dots,e_p)$ une base de F.

$\mathcal{B}_G=(e_{p+1},\dots,e_n)$ une base de G.

Ainsi $B=(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ une base de E.

On a :

$$F \text{ stable par } f \iff (\forall 1\leq i\leq p,\ f(e_i)\in F)$$
$$\iff (\forall 1\leq i\leq p,\ f(e_i)\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p))$$

$\iff \underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$ est de la forme

$$\begin{array}{c|c} & f(e_1)\ \cdots\ f(e_p)\ \ f(e_{p+1})\ \cdots\ f(e_n) \\ \hline \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \end{array}$$

Prop 2

Soient F et G deux sev supplémentaires de E $(E=F\oplus G)$.

Soit $B=B_F\cup B_G$ une base adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) F et G sont stables par f.
2) $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$ est de la forme : $\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$

Démo

Notons :

$\dim(E)=n$

$B_F=(e_1,\dots,e_p)$ une base de F.

$B_G=(e_{p+1},\dots,e_n)$ une base de G.

Ainsi $B=(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ une base de E.

$$(F \text{ et } G \text{ stables par } f) \iff \begin{cases} \forall 1\leq i\leq p,\ f(e_i)\in F \\ \forall p+1\leq i\leq n,\ f(e_i)\in G \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall\, 1 \leq i \leq p,\ f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \\ \forall\, p+1 \leq i \leq n,\ f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n) \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow \underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$ est de la forme

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right) \end{array}$$

On généralise la (prop 2) :

Prop 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $F_1, \dots, F_s$ des sev supplémentaires de E.

Soit $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_s$ une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_s$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $F_1, \dots, F_s$ sont stables par f.

2) $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & & 0 \\ & \boxed{*} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

3) Endomorphisme induit

Déf 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit F un sev stable par f.
L'endomorphisme induit par f sur F, qu'on note f_F, est défini par :

$$f_F : \left| \begin{array}{l} F \longrightarrow F \\ x \longmapsto f_F(x) = f(x) \end{array} \right.$$

NB :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sev stable par f.

1) f_F est bien une application de F vers F, car F stable par f.
2) f_F est linéaire car f l'est.
3) $f \neq f_F$, car n'ont pas le même ensemble de départ.
4) De même, $f \neq f_{/F}$; la restriction de f à F
5) $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f_F \in \mathcal{L}(F)$.

Prop 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit F un sev stable par f.
Soit f_F l'endomorphisme induit par f sur F.

1) $\ker(f_F) = \ker(f) \cap F$
2) $\mathrm{Im}(f_F) \subset (\mathrm{Im}(f) \cap F)$

Démo

1) $\ker(f_F) = \{x \in F \,/\, f_F(x) = 0\} = \{x \in F \,/\, f(x) = 0\} = \ker(f) \cap F$
2) OK

Prop 3

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par f et g.

1) F est stable par $f \circ g$, et on a :

$$(f \circ g)_F = f_F \circ g_F$$

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, F est stable par f^k, et on a :

$$(f^k)_F = (f_F)^k$$

3) Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, F est stable par $(\lambda f + \mu g)$ et on a :

$$(\lambda f + \mu g)_F = \lambda . f_F + \mu . g_F$$

Démo En exo chez-vous (facile)

Exo : Notons $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Considérons $D \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $D(f) = f'$.

Notons $\left| \begin{array}{l} F = \mathrm{vect}(\sin, \cos, \exp) \\ B = (\sin, \cos, \exp) \end{array} \right.$

1) Montrer que B est une base de F.

2) Montrer que F est stable par D.

3) Déterminer $\det(D_F)$ et $\mathrm{tr}(D_F)$; où D_F l'endom induit par D sur F.

D_F est-il inversible ?

II) Éléments propres d'un endomorphisme (d'une matrice)

1) Éléments propres d'un endomorphisme

E sera un $\mathbb{K}$-esp vect et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a) Vecteurs propres - Valeurs propres.

Déf 1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.

x est dit vecteur propre de f si et ssi :

1) $x \neq 0$

2) $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ f(x) = \lambda x$

Déf 2

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est dite valeur propre de f si et ssi :

$$\boxed{\exists x \in E \setminus \{0\},\ f(x) = \lambda x}$$

NB :

Supposons que $f(x) = \lambda x$, avec $x \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) x est dit vecteur propre de f associé à la valeur propre λ

2) λ est dite valeur propre de f associée au vecteur propre x.

Notation et vocabulaire

L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f et se note $S_p(f)$.

$$\lambda \in S_p(f) \iff (\exists x \neq 0,\ f(x) = \lambda x)$$

Prop 3 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\boxed{\lambda \in Sp(f) \iff \ker(f-\lambda I_E) \neq \{0\} \iff (f-\lambda I_E) \text{ non injectif}}$$

Démo Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$\lambda \in Sp(f) \iff (\exists x \neq 0,\ f(x) = \lambda x)$

$\iff \left(\exists x \neq 0,\ (f-\lambda I_E)(x) = 0\right)$

$\iff \exists x \neq 0,\ x \in \ker(f-\lambda I_E)$

$\iff \ker(f-\lambda I_E) \neq \{0\}$

$\iff (f-\lambda I_E)$ non injectif

Prop 4 Supposons que E est de dimension finie. On a :

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

a) $\lambda \in Sp(f)$

b) $(f-\lambda I_E)$ n'est pas inversible

c) $\det(f-\lambda I_E) = 0$

2) f inversible $\iff$ (0 n'est pas une valeur propre de f)

Démo

1) $\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow (f-\lambda I_E)$ non injectif

$\Leftrightarrow (f-\lambda I_E)$ non inversible (car E de dim finie)

$\Leftrightarrow \det(f-\lambda I_E)=0$

2) On a $(f-\lambda I_E)$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda \in Sp(f)$

Donc $(f-\lambda I_E)$ inversible $\Leftrightarrow \lambda \notin Sp(f)$

Alors f inversible $\underset{\text{pour } \lambda=0}{\Longleftrightarrow} 0 \notin Sp(f)$

Exemple classique

$E=C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $D\in\mathcal{L}(E)$ défini par $D(f)=f'$.

Pour chaque $\lambda\in\mathbb{R}$, on note : $e_\lambda : \mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\, x\mapsto e_\lambda(x)=e^{\lambda x}$.

Justifier que $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille de vecteurs propres de D, et que $Sp(D)=\mathbb{R}$.

Solution

1) Justifions que $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille de vecteurs propres de D.

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Justifions que e_λ est un vecteur propre de D.

D'abord $e_\lambda \neq 0$ (Claire).

$\boxed{\begin{array}{l} e_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e_\lambda(x) = e^{\lambda x} \end{array}}$

Et on a :

$\boxed{D(f) = f'}$

$D(e_\lambda) = ?$

On a : $\left(\forall x \in \mathbb{R},\ \left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x} = \lambda . e_\lambda(x)\right)$

D'où $D(e_\lambda) = \lambda . e_\lambda$

Ainsi, on a : $\begin{cases} e_\lambda \in E \setminus \{0\} \\ D(e_\lambda) = \lambda . e_\lambda \end{cases}$

D'où e_λ est un vecteur propre de D associé à la valeur propre λ. □

2) Montrons que $S_p(D) = \mathbb{R}$

On a $D \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$, alors $\boxed{S_p(D) \subset \mathbb{R}}$

Montrons l'autre inclusion : $\boxed{\mathbb{R} \subset S_p(D)}$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a d'après 1°) que λ est une valeur propre de D ; associée au vecteur propre e_λ.

D'où $\lambda \in S_p(D)$.

Par suite, on a $\boxed{\mathbb{R} \subset S_p(D)}$ □

Prop 5

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est une famille libre.

Rappel

Une famille infinie de vecteurs est libre si et ssi toutes ses sous-familles finies sont libres

Démo de prop 5

Selon le rappel, il suffit alors de montrer le résultat pour les familles finies de vecteurs propres.

Procédons par récurrence sur le cardinal de la famille.

Initialisation (Pour $n=1$)

Supp que (e) est une famille de vecteurs propres.

On a $e \neq 0 \Rightarrow (e)$ libre.

Hérédité

Soit $n \geqslant 1$.

Supposons que la propriété est vraie pour n.

Montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

Soit alors $(U_1, \dots, U_{n+1})$ une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ distinctes deux à deux.

Montrons que $(U_1, \dots, U_{n+1})$ est libre.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_1 U_1 + \dots + \alpha_n U_n + \alpha_{n+1} U_{n+1} = 0 \quad (\Sigma)$$

M que $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n+1} = 0$

Composons dans (Σ) par f, on obtient :

$$\alpha_1 \lambda_1 U_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n U_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} U_{n+1} = 0$$

Car : $(\forall i, f(U_i) = \lambda_i U_i)$

Multiplions (Σ) par λ_{n+1}, on obtient :

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} U_1 + \dots + \alpha_n \lambda_{n+1} U_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} U_{n+1} = 0$$

On a ainsi : $\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 U_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n U_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} U_{n+1} = 0 & (\omega) \\ \alpha_1 \lambda_{n+1} U_1 + \dots + \alpha_n \lambda_{n+1} U_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} U_{n+1} = 0 & (\omega') \end{cases}$

$(\omega)-(\omega')$ donne :

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) U_1 + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) U_n = 0$$

Or $(U_1, \dots, U_n)$ est une famille de cardinal n, formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Alors d'après l'hypothèse de récurrence, $(U_1, \dots, U_n)$ est libre.

D'où $\boxed{\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0}$ (car $\lambda_1 - \lambda_{n+1} \neq 0, \dots, \lambda_n - \lambda_{n+1} \neq 0$)

(Σ) devient : $\alpha_{n+1} U_{n+1} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_{n+1} = 0}$; car $U_{n+1} \neq 0$ comme vect propre.

Fin

Exemple express

$E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $e_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; x \longmapsto e_\lambda(x) = e^{\lambda x}$.

Justifier que $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de l'espace E.

Exo à la maison

Montrer via la définition que $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E.

---

b) Sous-espaces propres

Déf 1

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ est :

$$\boxed{E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda I_E)}$$

Prop 2

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$.

1) $x \in E_\lambda(f) \Longleftrightarrow f(x) = \lambda x$

2) $E_\lambda(f)$ est stable par f.

3) Si $fg = gf$, alors $E_\lambda(f)$ est stable par g.

Démo

1) et 2) (OK)

3) Soit $x \in E_\lambda(f)$. Montrons $g(x) \in E_\lambda(f)$
On a $f(x) = \lambda x$ et on veut montrer que $f(g(x)) = \lambda . g(x)$.
On a : $f(g(x)) = g(f(x))$ (car $fg = gf$)
$= g(\lambda x) = \lambda g(x)$

Prop 3

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux sont en somme directe.

Autrement dit

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont des valeurs propres distinctes deux à deux alors $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_s}(f)$ sont en somme directe.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Démo

Supp que $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont des valeurs propres distinctes deux à deux.

M que $E_{\lambda_1}(f), \dots, E_{\lambda_s}(f)$ sont en somme directe.

Soit alors $(x_1, \dots, x_s) \in E_{\lambda_1}(f) \times \dots \times E_{\lambda_s}(f)$ tel que :

$$\boxed{x_1 + \dots + x_s = 0} \quad \star$$

M que : $(\forall 1 \leq i \leq s, \ x_i = 0)$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que :

$$(\exists\, 1 \leq i \leq s, \ x_i \neq 0)$$

Notons $I = \{1 \leq i \leq s \,/\, x_i \neq 0\}$.

$\star$ devient : $\boxed{\sum_{i \in I} x_i = 0}$

D'autre part, $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2.

Donc $(x_i)_{i \in I}$ est une famille libre.

Ce qui contredit le fait que $\boxed{\sum_{i \in I} x_i = 0}$

Fin

Prop 4

1) $f(x) = \lambda x \Longrightarrow \left(\forall k \in \mathbb{N}, \ f^k(x) = \lambda^k . x\right)$

2) Si E est de dimension finie, On a :

$$\lambda \in S_p(f) \Longleftrightarrow \dim(E_\lambda(f)) \geq 1 \Longleftrightarrow rg(f - \lambda I_E) \leq n-1$$

Démo

1) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

2) $\boxed{\lambda \in S_p(f)} \Longleftrightarrow \ker(f - \lambda I_E) \neq \{0\}$

$\Longleftrightarrow \dim\left(\ker(f-\lambda I_E)\right) \neq 0$ $\qquad \boxed{F=\{0\} \Leftrightarrow \dim F = 0}$

$\Longleftrightarrow \dim\left(\ker(f-\lambda I_E)\right) \geqslant 1$

$\Longleftrightarrow \boxed{\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1}$

$\Longleftrightarrow n - rg(f-\lambda I_E) \geqslant 1$ (thm du rang)

$\Longleftrightarrow \boxed{rg(f-\lambda I_E) \leqslant n-1}$

Prop 5

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geqslant 1$.
f possède au plus n valeurs propres distinctes deux à deux.

Démo

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de f (distinctes 2 à 2).
Il s'agit de montrer que $\boxed{s \leq n}$.
Soient $e_1, \dots, e_s$ des vecteurs propres de f, associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.
Alors $(e_1, \dots, e_s)$ est une famille libre.

$\Longrightarrow s = card(e_1, \dots, e_s) \leq n$

2) Éléments propres d'une matrice carrée

A sera une matrice carrée de $M_n(\mathbb{K})$ $(n \geqslant 1)$

Déf 1 :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est dite une valeur propre de A si et ss'il existe $X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tel que

$$A \cdot X = \lambda . X$$

Déf 2 :

Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{K})$.

X est dit vecteur propre de A si et ssi :

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ X \neq 0 \\ 2)\ \exists \lambda \in \mathbb{K},\ AX = \lambda . X \end{array}}$$

Vocabulaire :

1) L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A, et se note $S_p(A)$.

2) Soient $X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $AX = \lambda . X$, on dit que :

i) X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

ii) λ est la valeur propre de A associée au vecteur propre X.

Prop 3

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\lambda \in S_p(A)$
2) $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$
3) $(A - \lambda I_n)$ non inversible.
4) $\det(A - \lambda I_n) = 0$

Démo :

$$\begin{aligned} \lambda \in S_p(A) &\iff \left(\exists X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ AX = \lambda X\right) \\ &\iff \left(\exists X \in M_{n1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\},\ (A - \lambda I_n)X = 0\right) \\ &\iff \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \end{aligned}$$

$\iff (A-\lambda I_n)$ non inversible

$\iff \det(A-\lambda I_n)=0$

Corollaire 4

A inversible $\iff 0 \notin S_p(A)$

Déf 5 :

Soit $\lambda \in S_p(A)$.

Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ est :

$$\boxed{E_\lambda(A)=\ker(A-\lambda I_n)}$$

Prop 6 :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lambda \in S_p(A)$
2) $\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1$
3) $rg(A-\lambda I_n) \leqslant n-1$

Démo :

$$\begin{aligned}
\lambda \in S_p(A) &\iff \ker(A-\lambda I_n) \neq \{0\} \\
&\iff \dim\big(\ker(A-\lambda I_n)\big) \neq 0 \\
&\iff \dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1 \\
&\iff n - rg(A-\lambda I_n) \geqslant 1 \quad \text{(thm du rang matriciel)} \\
&\iff rg(A-\lambda I_n) \leqslant n-1
\end{aligned}$$

Rappel :

$f \in \mathcal{L}(E)$. B une base de E. $\lambda \in \mathbb{K}$. $x \in E$.

Notons $X = \underset{B}{mat}(x)$ et $A = \underset{B}{mat}(f)$. On a :

$$\boxed{f(x) = \lambda x \iff AX = \lambda . X}$$

De cette dernière équivalence, on tire la proposition suivante :

Prop 7

1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E.
f et $\underset{B}{mat}(f)$ ont les mêmes valeurs propres.

2) Une matrice carrée et son endomorphisme canoniquement associé ont les mêmes valeurs propres.

Prop 8

Avec les notations ci-dessus, et si $\lambda \in Sp(f)$ $\left(= Sp(A)\right)$, on a :

1) $x \in E_\lambda(f) \iff X \in E_\lambda(A)$

2) $\dim(E_\lambda(f)) = \dim(E_\lambda(A))$

Démo :

1) $x \in E_\lambda(f) \iff f(x) = \lambda x$

$$\iff \underset{B}{mat}(f) . \underset{B}{mat}(x) = \lambda . \underset{B}{mat}(x)$$

$$\iff AX = \lambda . X$$

$$\iff X \in E_\lambda(A)$$

2) L'application $\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & M_{n1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \underset{B}{mat}(x) \end{array}$ est un isomorphisme

et $x \in E_\lambda(f) \iff X \in E_\lambda(A)$

$$\iff \phi(x) \in E_\lambda(A)$$

$$\iff x \in \phi^{-1}(E_\lambda(A))$$

D'où $E_\lambda(f) = \phi^{-1}(E_\lambda(A))$

$\Rightarrow \dim(E_\lambda(f)) = \dim \phi^{-1}(E_\lambda(A)) \underset{\downarrow}{=} \dim(E_\lambda(A))$

car ϕ^{-1} isomorphisme.

Si $f \in \text{isom}(E,F)$ et H sev de E.
On a :
$$\dim(H) = \dim f(H)$$

Saviez-vous ?

III) Polynôme Caractéristique

1) Polynôme Caractéristique d'une matrice Carrée

Déf 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ (où $n \geq 1$).
Le polynôme caractéristique de A est noté χ_A et défini par :

$$\boxed{\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)}$$

Prop 2

Les valeurs propres d'une matrice sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.

Autrement dit

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\lambda \in S_p(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0$$

Démo

$\lambda \in Sp(A) \iff (A - \lambda I_n)$ non inversible

$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0$

$\iff (-1)^n \det(\lambda I_n - A) = 0$

$\iff \det(\lambda I_n - A) = 0$

$\iff \chi_A(\lambda) = 0$

Exercice

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Solution

1) Déterminons les valeurs propres de A

On sait que ce sont les racines de $\chi_A(\lambda)$.

Déterminons d'abord le polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$ et puis on tire ses racines.

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 & 2 \\ -1 & \lambda & 1 \\ -3 & 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

Vous pouvez vous débrouiller... Mais suivons cette piste qui marche toujours.

En développant ce déterminant, on trouve après calculs que :

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$$

Factorisons $\chi_A(\lambda)$ et en tirons les racines.

On a : $\boxed{\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}$

D'où $\boxed{S_p(A) = \{0, 1, 2\}}$

---

2) Déterminons les sous-espaces propres de A

Il s'agit de déterminer les sous-espaces propres $E_0(A), E_1(A)$ et $E_2(A)$.

i) Détermination de $E_2(A)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$X \in E_2(A) \iff X \in \ker(A - 2I_3)$$

$$\iff (A - 2I_3)X = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

On se débrouille sans Gauss

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ x - 2y - z = 0 \\ 3x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow X = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X \in E_2(A) \Longleftrightarrow X \in \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Enfin :

$$\boxed{E_2(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

On trouve de même que :

$$\boxed{\begin{array}{l} E_0(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ E_1(A) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \end{array}}$$

NB 1

La détermination des éléments propres d'une matrice veut dire la détermination de ses valeurs propres et des sous-espaces propres associés.

NB 2

En pratique, on commence souvent par déterminer χ_A puis ses racines qui seront les valeurs propres...

Prop 3

Si A est une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure) (resp. triangulaire inférieure) alors ses valeurs propres sont exactement ses coéfficients diagonaux.

Précisemment, on a $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

dans chacun des cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Démo

Supp que $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. (Pareil pour les autres cas)

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

$$= \begin{vmatrix} X-\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & X-\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$ (déterminant triangulaire supérieur)

Prop 4

Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres

Autrement dit

1) $\chi_A = \chi_{({}^tA)}$

2) $S_p(A) = S_p({}^tA)$

Démo :

1) $\chi_A = \chi_{(^tA)}$?

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \det({}^t(\lambda I_n - A)) = \det(\lambda I_n - {}^tA) = \chi_{({}^tA)}(\lambda)$$

$\det(M) = \det({}^tM)$

2) $Sp(A) = Sp({}^tA)$ car $\chi_A = \chi_{({}^tA)}$ donc possèdent les mêmes racines.

Prop 5

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres.

Autrement dit :

Si $A = PBP^{-1}$ alors $\begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ Sp(A) = Sp(B) \end{cases}$

Démo

Supp que : $A = PBP^{-1}$, on a

1) $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$

$$= \det(\lambda I_n - PBP^{-1})$$

$$= \det(P.(\lambda I_n)P^{-1} - PBP^{-1})$$

$$= \det(P(\lambda I_n - B)P^{-1})$$

$$= \det(\lambda I_n - B)$$ (car deux matrices semblables ont le même déterminant)

$= \chi_B(\lambda)$

2) $\chi_A = \chi_B$ donc ont les mêmes racines

$$\Longrightarrow \boxed{Sp(A) = Sp(B)}$$

Corollaire 6

Soient B et B' deux bases d'un esp vect de dimension finie E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

$\mathrm{mat}_B(f)$ et $\mathrm{mat}_{B'}(f)$ ont le même polynôme caractéristique.

Démo

Via la (prop 5) et que $\mathrm{mat}_B(f)$ et $\mathrm{mat}_{B'}(f)$ sont semblables

Prop 7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) $\chi_A(X)$ est unitaire de degré n.

2) $\chi_A(X) = X^n - tr(A).X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$

Exemple illustratif

Rappel

$$(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_n) = X^n - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Considérons une matrice triang sup :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On sait que $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$

(Rappel) $\Rightarrow$ $\chi_A(X) = X^n - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

D'autre part, on a : $\begin{cases} tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_A(X) = X^n - tr(A).X^{n-1} + \dots + (-1)^n det(A)}$$

C'est ce qu'on a dans la (prop 7)

Prop 8 (Multiplicité d'une valeur propre)

La multiplicité d'une valeur propre λ de A est sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique χ_A.

On la note $m_\lambda(A)$.

Vocabulaire

1) Si $m_\lambda(A) = 1$, λ est dite valeur propre simple.

2) Si $m_\lambda(A) = 2$, λ est dite valeur propre double.

3) Si $m_\lambda(A) = 3$, λ est dite valeur propre triple.

4) Si $m_\lambda(A) \geq 2$, λ est dite valeur propre multiple.

Prop 9

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Supp que $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$. On a :

1) $tr(A)$ est la somme des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

2) $det(A)$ est le produit des valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

Autrement dit :

Supposons $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{m_i}$, où les λ_i sont distincts deux à deux.

On a :

1) $tr(A) = \sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i$

2) $det(A) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_i}$

Démo :

Supposons $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{m_i}$, où les λ_i sont distincts deux à deux.

D'après le rappel :

Rappel

$$(X-\mu_1)\cdots(X-\mu_n) = X^n - \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\right)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \mu_i\right)$$

On a :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{m_i} = X^n - \left(\sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i\right) \cdot X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_i}\right)$$

Et on sait que :

$$\chi_A(X) = X^n - tr(A) \cdot X^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(A)$$

D'où :

$$\boxed{tr(A) = \sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i}$$

$$\boxed{det(A) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_i}}$$

Fin

2) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

E sera ici un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geq 1$.

Déf 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Le polynôme caractéristique de f, qu'on note χ_f, est celui de sa matrice dans une base quelconque.

Autrement dit :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E. Notons $A = \text{mat}_B(f)$

$$\boxed{\chi_f = \chi_A}$$

NB 1

χ_f est bien défini ; ça ne dépend pas de la base B choisie.

NB 2

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme possède les mêmes propriétés que celui d'une matrice.

Par exemple :

1) Les valeurs propres de f sont les racines de χ_f.
2) χ_f est unitaire de degré n (où $n = \dim E$).
3) $\chi_f(X) = X^n - \text{tr}(f).X^{n-1} + \dots + (-1)^n.\det(f)$

Prop 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soient F un sev de E stable par f et f_F son endomorphisme induit. On a :

$$\boxed{\chi_{f_F}(X) \,/\, \chi_f(X)}$$

Démo

Soit G un sev supplémentaire de F. $(E = F \oplus G)$.

Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \sqcup \mathcal{B}_G$ une base adaptée à cette décomposition.

$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme :

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & D \\ \hline O & C \end{array}\right) \overset{\text{notée}}{=\!=} M$$

Il est clair que : $A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F}(f_F)$

Et on a :

$$\chi_f(X) = \chi_M(X)$$

$$= \det(XI_n - M)$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} XI_p - A & -D \\ \hline O & XI_q - C \end{array}\right| \quad \text{où } \left|\begin{array}{l} p = \dim(F) \\ q = \dim(G) = n - p \end{array}\right.$$

$$= \det(XI_p - A) \times \det(XI_q - C) \quad \text{(déterminant triang sup par blocs)}$$

$$= \chi_A(X) \times \det(XI_q - C) \quad \left(A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_F}(f_F)\right)$$

D'où $\boxed{\chi_f(X) = \chi_{f_F}(X) \times \det(XI_q - C)}$

Enfin $\boxed{\chi_{f_F}(X) \,/\, \chi_f(X)}$

Fin

Prop 3

Soit $\lambda \in S_p(f)$. On a :

$$\boxed{1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant m_\lambda(f)}$$

Démo

1) $\lambda \in S_p(f) \Longrightarrow \boxed{\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1}$

2) Notons $d = \dim(E_\lambda(f))$. On veut m que $d \leqslant m_\lambda(f)$.

On sait que $E_\lambda(f)$ est stable par f.

Notons f_1 l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda(f)$.

(Prop 2) $\Longrightarrow \chi_{f_1}(x) \,/\, \chi_f(x)$.

D'autre part, on a : $\left| \begin{array}{l} f_1 \in \mathcal{L}(E_\lambda(f)) \\ \dim(E_\lambda(f)) = d \\ \forall x \in E_\lambda(f),\ f_1(x) = \lambda x \end{array} \right.$

D'où $f_1 = \lambda . id_{E_\lambda(f)}$

$\Rightarrow \chi_{f_1}(x) = (x - \lambda)^d$

Ainsi : $(x-\lambda)^d \,/\, \chi_f(x)$

D'où $\boxed{d \leqslant m_\lambda(f)}$

Fin

Corollaire 4

Les sous-espaces propres associés aux valeurs propres simples sont de dimension 1.

Démo

Soit $\lambda \in S_p(f)$, avec $m_\lambda(f) = 1$.

Vérifions que $\dim(E_\lambda(f))=1$.

On a : $1 \leq \dim(E_\lambda(f)) \leq m_\lambda(f) = 1$ $\square$

IV) Endomorphismes et matrices diagonalisables

1) Endomorphismes diagonalisables

Déf 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension finie.
f est diagonalisable si et ss'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale.

Prop 2

f est diagonalisable si et ss'il existe une base de E formée de vecteurs propres.

Démo

f diagonalisable $\iff$ (Il existe une base $B=(e_i)$, et il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \Bigg)$$

$\iff$ (Il existe une base B formée de vect propres)

Exemples d'endomorphismes diagonalisables (à retenir)

1) $\lambda . I_E$: les homothéties

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(\lambda I_E) = \lambda I_n \text{ matrice diagonale } (B \text{ base qque})$$

2) Tous les projecteurs sont diagonalisables

Soit p un projecteur de E.

On a $E = \mathrm{Im}\,p \oplus \ker p$

Soit $B = B_1 \cup B_2$ une base adaptée.

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(p) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{\text{matrice diagonale}} \; ; \text{ où } r = \mathrm{rg}(p)$$

3) Toutes les symétries sont diagonalisables

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle.

On a $E = \ker(s - I_E) \oplus \ker(s + I_E)$

Soit $B = B_1 \cup B_2$ une base adaptée.

On a $$\underset{B}{\mathrm{mat}}(s) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_q \end{array}\right)}_{\text{qui est une mat diagonale}} \quad \text{où } \begin{cases} p = \dim \ker(s - I_E) \\ q = \dim \ker(s + I_E) \end{cases}$$

Exo très classique

E étant un $\mathbb{K}$-esp vect de dimension finie $n \geq 1$.

Soit p un projecteur de E.

Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$

Solution

On a p un projecteur de E.

$\Rightarrow E = \mathrm{Im}\,p \oplus \ker p$

Soit $B = B_1 \cup B_2$ une base adaptée.

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \; ; \text{ où } r = \mathrm{rg}(p)$$

$$\Rightarrow tr(p) = tr(\underset{B}{mat}(p)) = r = rg(p)$$

$\square$

Prop 3 (Condition suffisante de diagonalisabilité)

$\dim(E) = n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Si f possède n valeurs propres distinctes deux à deux alors f est diagonalisable.

Démo

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f, distinctes deux à deux.

Soient $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs propres de f associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivement.

$B = (e_1, \dots, e_n)$ est donc une famille libre de E.

Or $card(B) = n = \dim(E)$.

Alors B est une base de E.

Et elle est bien formée de vecteurs propres de f.

D'où f est diagonalisable

$\square$

Attention !

Dans la prop 3, la réciproque est en général fausse.

Contre-exemple

$f = id_{\mathbb{R}^3}$: f diagonalisable et $Sp(f) = \{1\}$: n'a pas 3 val propres.

Questions express

1) Que dire d'un endomorphisme diagonalisable dont 0 est l'unique valeur propre ?
2) Que dire d'un endomorphisme diagonalisable dont 1 est l'unique valeur propre ?

Prop 4

$\dim(E) = n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de f, distinctes deux à deux.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est diagonalisable

2) $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$

3) $n = \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_s})$

Démo

$\boxed{1) \Longrightarrow 2)}$

Supp que f est diagonalisable

Et m.q. $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$

D'abord, $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s}$ sont bien en somme directe.

Établissons que : $E = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_s}$. On a :

$$E = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_s} \; (1) \Longleftrightarrow E \subset (E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_s})$$

$$\Longleftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n, \; e_i \in (E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_s})$$

Ce qui est vérifié, car chaque e_i est dans l'un des E_{λ_j} (comme vecteur propre), et que $E_{\lambda_j} \subset (E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_s})$.

D'où la conclusion. □

$\boxed{2) \Longrightarrow 3)}$ Évident, vu que $\dim\left(\bigoplus_i E_{\lambda_i}\right) = \sum_i \dim(E_{\lambda_i})$

$\boxed{3) \Longrightarrow 1)}$

Supp que $n = \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_s})$.

Et on que f est diagonalisable.

On a $\left| \begin{array}{l} E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_s} \text{ sont en somme directe} \\ \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_s}) = \dim E \end{array} \right.$

D'où $E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$.

Soit $B = B_1 \cup \dots \cup B_s$ une base adaptée.

B est clairement formée de vecteurs propres de f.

D'où f est diagonalisable $\square$

$\begin{pmatrix} x \neq 0 \\ x \in E_{\lambda_i} \end{pmatrix} \Longrightarrow (x \text{ vecteur propre associé à } \lambda_i)$

Rappel

Prop 5

$\dim(E) = n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

2) $\begin{cases} \chi_f(x) \text{ est scindé dans } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in S_p(f),\ \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f) \end{cases}$

Démo

$\boxed{1) \Longrightarrow 2)}$

Supp que f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

M.q. $\begin{cases} \chi_f(X) \text{ est scindé dans } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in S_p(f),\ \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f) \end{cases}$

Notons $S_p(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$; où les λ_i sont distinctes deux à deux.

Notons m_i la multiplicité de λ_i.

On a : $\quad E = \bigoplus_{i=1}^{s} E_{\lambda_i}$.

Soit $\quad B = \bigcup_{i=1}^{s} B_i$, une base adaptée. On a :

$$\underset{B}{\operatorname{mat}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_s I_{d_s} \end{pmatrix} ; \text{ où } d_i = \dim(E_{\lambda_i})$$

On a alors : $\quad \chi_f(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{d_i}$

Donc $\chi_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$.

D'autre part, on a : $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_i}$

D'où
$$\boxed{\begin{aligned} \chi_f(X) &= \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{d_i} \\ \chi_f(X) &= \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_i} \end{aligned}}$$

Vu que les $(X - \lambda_i)$ sont des polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux, et vu l'unicité de la décomposition du polynôme $\chi_f(X)$ en produit de polynômes irréductibles, on tire que :

$$\forall\ 1 \leq i \leq s,\ d_i = m_i$$

Càd : $\forall \lambda \in S_p(f),\ \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f)$ $\square$

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$

Supp que $\begin{cases} \chi_f(X) \text{ est scindé dans } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in S_p(f),\ \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f) \end{cases}$

Mq que f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

$\chi_f(X)$ scindé dans $\mathbb{K}$, alors : $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{m_i}$

où | Les λ_i distincts 2 à 2.
| m_i est la multiplicité de λ_i.

En passant au degré, on aura : $n = \sum_{i=1}^{s} m_i$

Or : $(\forall i,\ m_i = \dim(E_{\lambda_i}))$

Alors $\dim(E) = \sum_{i=1}^{s} \dim(E_{\lambda_i})$

D'où f est diagonalisable $\square$

Résumé

$\dim(E) = n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.
2) Il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale.
3) Il existe une base B de E formée de vecteurs propres de f.
4) $E = \bigoplus_{\lambda \in S_p(f)} E_\lambda(f)$

5) $\dim(E) = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda(f))$

6) $\begin{cases} \chi_f(x) \text{ est scindé dans } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in Sp(f),\ \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f) \end{cases}$

2) Matrices diagonalisables

Déf 1

Une matrice carrée est dite diagonalisable si et ssi elle est semblable à une matrice diagonale.

NB :

1) Toute matrice diagonale est diagonalisable.

$\longrightarrow$ Elle est semblable à elle-même ...

2) La réciproque est en général fausse.

C/exemple : Voir plus loin.

Prop 2

A est diagonalisable si et ss'il existe une matrice inversible P telle que PAP^{-1} soit une matrice diagonale.

Démo

A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ (Elles existent D et P diagonale et inversible resp telles que :
$A = P^{-1}DP$)

$\Leftrightarrow$ (Elles existent D et P diagonale et inversible resp telles que :
$$PAP^{-1} = D$$)

$\Leftrightarrow$ Elle existe P inversible tque PAP^{-1} diagonale

---

Prop 3 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E.

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \underset{B}{mat}(f) \text{ est diagonalisable}}$$

Démo

($\Rightarrow$)
f diagonalisable $\Rightarrow$ (Il existe une base S de E tq $\underset{S}{mat}(f)$ soit diagonale)

Donc $\underset{B}{mat}(f)$ est semblable à $\underset{S}{mat}(f)$, qui est diagonale.

($\Leftarrow$) Supp $\underset{B}{mat}(f)$ semblable à D, matrice diagonale.

Donc $\underset{B}{mat}(f) = PDP^{-1}$

Soit S la base de E telle que $P_{B,S} = P$ (ie $\underset{B}{mat}(S) = P$)

On a $\underset{B}{mat}(f) = P \underset{S}{mat}(f) P^{-1}$

D'où $\underset{S}{mat}(f) = D$, qui est une matrice diagonale.

Enfin, f est diagonalisable $\square$

Corollaire 4

Une matrice est diagonalisable si et ssi son endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable.

Rappel :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
L'endomorphisme can associé à A est $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que :

$$\underset{B_c}{\mathrm{mat}}(f) = A$$

où B_c est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Démo

Gardons ces notations. On a :

$$f \text{ diagonalisable} \iff \underbrace{\underset{B_c}{\mathrm{mat}}(f)}_{=A} \text{ est diagonalisable}$$

$$\iff A \text{ est diagonalisable}$$

Exemple express

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. M.q. A est diagonalisable dans chacun des cas suivants :

1) $A^2 = A$
2) $A^2 = I_n$

Sol :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'end can associé à A.

1) On a $A^2 = A \iff f^2 = f \iff f$ projecteur.
Puis on continue comme on avait fait pour la diagonalisabilité d'un projecteur.

2) Idem $\square$

Corollaire 5 (Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Si : A possède n valeurs propres distinctes deux à deux, alors A est diagonalisable.

Démo

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ l'end can associé à A.

(A possède n valeurs propres distinctes deux à deux)

$\Longrightarrow$ (f possède n valeurs propres distinctes deux à deux)

$\Rightarrow$ f diagonalisable

$\Rightarrow$ A diagonalisable $\square$

Corollaire 6

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

2) $$n = \sum_{\lambda \in S_p(A)} \dim(E_\lambda(A))$$

3) $$M_{n1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$$

4) $$\begin{cases} \chi_A(x) \text{ est scindé dans } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in S_p(A),\ \dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A) \end{cases}$$

Exercice

1) Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A est-elle diagonalisable ?

Si oui, réduisez-la.

2) Même question pour la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

NB :

1) Supp que A est diagonalisable.

Réduire A (ou diagonaliser A) veut dire :

> Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que : $A = PDP^{-1}$

2) Supp que f est diagonalisable.

Réduire f (ou diagonaliser f) veut dire :

> Déterminer une matrice diagonale D et une base B tq : $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = D$

Exercice

1) Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

i) A est-elle diagonalisable ?

On a :

$$\chi_A(x) = \det(X I_3 - A)$$

$$= \begin{vmatrix} X-3 & -2 & 0 \\ -2 & X-3 & 0 \\ 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant diagonal par blocs)}$$

$$= \begin{vmatrix} X-3 & -2 \\ -2 & X-3 \end{vmatrix} \cdot (X-3)$$

$$= \left((X-3)^2 - 4\right)(X-3)$$

$$\boxed{\chi_A(x) = (X-5)(X-1)(X-3)}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_p(A) = \{1, 3, 5\}}$$

Ainsi, $A \in M_3(\mathbb{R})$ et possède 3 valeurs propres

D'où A est diagonalisable. $\square$

ii) Diagonalisons A

Càd trouvons une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$ telles que :

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On prend $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Déterminons P telle que :

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

P matrice de Passage ...

idée

à chercher

V) Endomorphismes et matrices trigonalisables

1) Trigonalisabilité

E sera un $\mathbb{K}$-ev vect de dim finie $n \geq 1$

Déf 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est dit trigonalisable si et ss'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice triangulaire supérieure.

Prop 2

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$. Soit B une base de E.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est trigonalisable

2) $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Démo Calquée sur celle vue pour « f diagonalisable »

Déf 3

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

A est dite trigonalisable si et ssi elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Corollaire 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E.

f est trigonalisable $\iff$ $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$ est trigonalisable

Prop 5

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est trigonalisable

2) Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que PAP^{-1} soit triangulaire supérieure

NB

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1) A triangulaire supérieure $\Longrightarrow$ A trigonalisable

2) La réciproque est en général fausse.

Exo

Mq que

A triangulaire inférieure $\Longrightarrow$ A trigonalisable

Prop 6

Un endomorphisme (resp. matrice) est trigonalisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

Démo

$(\Longrightarrow)$ Supp $\underset{B}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, où les λ_i dans $\mathbb{K}$.

Alors $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$, scindé dans $\mathbb{K}$.

$(\Longleftarrow)$

On veut montrer que $\chi_f(X)$ (resp $\chi_A(X)$) est scindé dans $\mathbb{K}$ alors f (resp. A) est trigonalisable.

On fera par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation Pour $n = 1$ (OK)

Hérédité

Soit $n \geq 1$.
Supp que la propriété est vraie pour n, et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $\dim(E) = n+1$.
Supp que $\chi_f(x)$ est scindé dans $\mathbb{K}$, et montrons que f est trigonalisable dans $\mathbb{K}$.

Soit $\lambda \in Sp(f)$ (ça existe car $\chi_f(x)$ scindé dans $\mathbb{K}$, donc possède au moins une racine dans $\mathbb{K}$).
Soit e un vect propre de f associé à la valeur propre λ.
Complétons e en une base de E. (via le TBI).
Soit $B = (e, e_1, \dots, e_n)$ une telle base de E.

On a :
$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right) \quad (\Omega)$$

où $C \in M_n(\mathbb{K})$.
On veut m que f est trigonalisable, càd que $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$ l'est.
Il suffit de trouver une matrice inversible $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que $P\,\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)\,P^{-1}$ soit triangulaire sup.
D'autre part, d'après (Ω), $\chi_f(x) = (X-\lambda)\,\chi_C(x)$ et est scindé dans $\mathbb{K}$.
D'où $\chi_C(x)$ est aussi scindé dans $\mathbb{K}$.
Or $C \in M_n(\mathbb{K})$, alors d'après l'hypothèse de récurrence, C est trigonalisable dans $\mathbb{K}$.
$\Longrightarrow \exists\, Q \in GL_n(\mathbb{K}),\ QCQ^{-1}$ triangulaire sup.

Posons $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$, P est bien inversible ($\det P = \det Q \neq 0$)

et $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right)$.

Ainsi : $P \underset{B}{\operatorname{mat}}(f) P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & C \\ 0 & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right)$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & QCQ^{-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$, qui est triang sup $\square$

Corollaire 7

Dans $\mathbb{C}$, tout endomorphisme (resp. matrice) est trigonalisable.

Démo

Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme de degré ≥ 1 est scindé.
En particulier $\chi_f(x)$ et $\chi_A(x)$ sont scindés dans $\mathbb{C}$.

Exemple express

1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $\mathbb{R}$?

2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $\mathbb{C}$?

À retenir :

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

1) i) (f diagonalisable dans $\mathbb{K}$) $\Longrightarrow$ (f trigonalisable dans $\mathbb{K}$)

ii) La réciproque est en général fausse.

2) i) (A diagonalisable dans $\mathbb{K}$) $\Longrightarrow$ (A trigonalisable dans $\mathbb{K}$)

ii) La réciproque est en général fausse.

2) Endomorphismes et matrices nilpotents

Vocabulaire

Matrice triangulaire supérieure stricte : C'est toute matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Lemme

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure stricte alors $A^n = 0$.

Démo

Voir TD

NB

1) f nilpotent $\Longleftrightarrow \underset{B}{\text{mat}}(f)$ l'est

2) A nilpotente $\Longleftrightarrow$ (son endom can associé l'est)

Prop 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a :

1) f nilpotent $\Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ f \text{ trigonalisable} \\ 2)\ Sp(f) = \{0\} \end{cases}$

2) A nilpotente $\Longleftrightarrow \begin{cases} 1)\ A \text{ trigonalisable} \\ 2)\ Sp(A) = \{0\} \end{cases}$

Démo

1) ($\Leftarrow$)

Supp que $\begin{cases} 1)\ f \text{ trigonalisable} \\ 2)\ Sp(f) = \{0\} \end{cases}$ et Mque f nilpotent.

Il existe une base B de E telle que $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \underset{B}{\mathrm{mat}}(f^n) = \left(\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)\right)^n = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}^n = 0$ (Lemme)

D'où $f^n = 0$ $\square$

($\Rightarrow$)

Montrons que : « Tout endomorphisme nilpotent est trigonalisable d'unique valeur propre nulle. »

Raisonnons par récurrence sur $\dim(E) = n \geqslant 1$.

Initialisation Pour $n=1$. (En bref)

$\left(\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = (\lambda) \text{ et } f^r = 0\right) \Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = (0)$ $\square$

Hérédité

Soit $n \geqslant 1$. Supposons la propriété vraie pour n et montrons qu'elle est vraie pour $(n+1)$.

Supp $\dim(E) = n+1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

Mq que f est trigonalisable et que $Sp(f) = \{0\}$.

On a f nilpotent $\Rightarrow f$ non inversible $\left(\text{par exemple } (\det(f))^r = 0 \Rightarrow \det(f) = 0\right)$

$\Rightarrow 0 \in Sp(f)$

Soit e un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

Soit $B = (e, e_1, \dots, e_n)$ une base de E. (via le TBI)

On a :

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right), \text{ où } C \in M_n(\mathbb{K})$$

Or f nilpotent, alors : $(\exists r \geq 1, f^r = 0)$

$$\Rightarrow \left(\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)\right)^r = 0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & C^r \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow C^r = 0$$

Ainsi, $C \in M_n(\mathbb{K})$ et est nilpotente.

Alors d'après l'hypothèse de récurrence, C est trigonalisable d'unique valeur propre nulle.

$$\Rightarrow \left(\exists Q \in GL_n(\mathbb{K}),\ Q C Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Posons $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$, on a $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ et que :

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right)$$

En plus : $P . \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) . P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & QCQ^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$

D'où $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$ est trigonalisable d'unique valeur propre 0.

$\Rightarrow f$ l'est aussi $\square$

Prop 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $\dim(E) = n \geq 1$.

$$\boxed{f \text{ nilpotent} \Leftrightarrow \chi_f(X) = X^n}$$

Démo

f nilpotent $\iff \begin{cases} f \text{ trigonalisable} \\ Sp(f) = \{0\} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \chi_f(X) \text{ scindé} \\ 0 \text{ l'unique racine de } \chi_f(X) \end{cases}$

$\iff \chi_f(X) = X^n$ ($\chi_f(X)$ de degré n et unitaire) $\square$

Prop 3

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\boxed{A \text{ nilpotente} \iff \chi_A(X) = X^n}$$

NB

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $\dim(E) = n \geq 1$.

$$\boxed{f \text{ nilpotent} \iff f^n = 0}$$

Démo Vue lors de la démo de Prop 1.

NB On verra une démo plus rapide via le thm de Cayley-Hamilton.

Prop 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où $\dim(E) = n \geq 1$.

Supp que f est nilpotent d'indice de nilpotence d.

On a : $\boxed{d \leq n}$

Démo

Méthode 1

On a $f^n = 0 \implies d \leq n$ (par déf de l'indice d). $\square$

Méthode 2

$f^{d-1} \neq 0 \Rightarrow \left(\exists x_0,\ f^{d-1}(x_0) \neq 0\right)$

On peut montrer que $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{d-1}(x_0)\right)$ est libre (Classique)

$\Rightarrow \operatorname{card}\left(\left(x_0, \dots, f^{d-1}(x_0)\right)\right) = d \leq \dim(E) = n$ $\square$

Caractérisations d'un endomorphisme nilpotent

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E de dimension finie $n \geq 1$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f nilpotent

2) $\begin{cases} 1)\ f \text{ trigonalisable} \\ 2)\ Sp(f) = \{0\} \end{cases}$

3) $\chi_f(X) = X^n$

4) $f^n = 0$

Caractérisations d'une matrice nilpotente

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $n \geq 1$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A nilpotente

2) $\begin{cases} 1)\ A \text{ trigonalisable} \\ 2)\ Sp(A) = \{0\} \end{cases}$

3) $\chi_A(X) = X^n$

4) $A^n = 0$

VI) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

1) Généralités

Exemples introductifs

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$P(X)$	$P(f)$	$P(A)$
$3X^2+4X$	$3f^2+4f$	$3A^2+4A$
X^4-X+2	f^4-f+2I_E	A^4-A+2I_n
1	I_E	I_n

Cas général

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{s} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

1) $P(f) = \sum_{k=0}^{s} a_k f^k$; où $f^0 = id_E$

2) $P(A) = \sum_{k=0}^{s} a_k A^k$; où $A^0 = I_n$

Remarque

1) Pour $P(f)$, on parle de polynôme d'endomorphisme.
2) Pareil, pour $P(A)$, on parle de polynôme de matrice.
3) Si $P(f)=0$, on dit que P est un polynôme annulateur de f.
4) De même, on parle de polynôme annulateur de la matrice A.

Exemples rapides

L'endomorphisme f	Un polynôme annulateur non nul de f
I_E	$X-1$
λI_E	$X-\lambda$
0	X
f un projecteur : $(f^2=f)$	X^2-X
f une symetrie $(f^2=I_E)$	X^2-1

Prop 1

Soient $f\in\mathcal{L}(E)$ et $A\in M_n(\mathbb{K})$.
Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$. On a :

1) i) $(\alpha P+\beta Q)(f)=\alpha P(f)+\beta Q(f)$

ii) $(\alpha P+\beta Q)(A)=\alpha P(A)+\beta Q(A)$

2) i) $(P\cdot Q)(f)=P(f)\circ Q(f)$

ii) $(P.Q)(A)=P(A)\times Q(A)$

Coroll 2

Soient $f\in\mathcal{L}(E)$ et $A\in M_n(\mathbb{K})$.
Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$. On a :

1) $P(f)$ et $Q(f)$ Commutent.

2) $P(A)$ et $Q(A)$ commutent.

3) $\ker(P(f))$ est stable par $Q(f)$.

4) $\ker(P(A))$ est stable par $Q(A)$.

Coroll 3

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1) L'application $P \mapsto P(f)$ est un morphisme de l'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ vers l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$.

2) L'application $P \mapsto P(A)$ est un morphisme de l'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, \cdot, \times)$ vers l'algèbre $(M_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$.

NB 1 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Notons $\phi : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$; $P \mapsto P(f)$ le morph d'algèbres ci-dessus.

1) $\ker(\phi) = \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
Il s'appelle l'idéal annulateur de f.

2) $\mathrm{Im}(\phi) = \{P(f) \,/\, P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
Elle se note $\mathbb{K}[f]$.

3) On parle de même de $\mathbb{K}[A]$, où $A \in M_n(\mathbb{K})$, ainsi que de l'idéal annulateur de A.

Exercice

Montrer que si deux matrices A et B sont semblables, alors elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

Autrement dit

Si $A = QBQ^{-1}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P(A) = 0 \iff P(B) = 0$$

Exercice

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E.

Mq que f et $\underset{B}{mat}(f)$ ont les mêmes polynômes annulateurs.

Autrement dit

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $A = \underset{B}{mat}(f)$. On a :

$$P(f) = 0 \iff P(A) = 0$$

Prop 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supp que $f(x) = \lambda \cdot x$. On a :

1) $\forall k \in \mathbb{N}, \ f^k(x) = \lambda^k \cdot x$

2) $\forall P \in \mathbb{K}[X], \ \big(P(f)\big)(x) = \big(P(\lambda)\big) \cdot x$

Démo

Supp que $f(x) = \lambda \cdot x$

1) $\forall k \in \mathbb{N}, \ f^k(x) = \lambda^k \cdot x$

Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, Mq que : $\big(P(f)\big)(x) = \big(P(\lambda)\big) \cdot x$

Posons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On a :

$$\big(P(f)\big)(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k\right)(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{f^k(x)}_{= \lambda^k \cdot x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k x$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) x$$

$$= \left(P(\lambda) \right) . x \quad \square$$

Corollaire 5

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit P un polynôme annulateur de f.

Si $\lambda \in Sp(f)$ alors λ est une racine de P.

Démo

Supp $\lambda \in Sp(f)$ et M.q. $P(\lambda) = 0$.

On a $\lambda \in Sp(f) \Rightarrow (\exists x \neq 0,\ f(x) = \lambda . x)$

$$\Rightarrow \left(P(f)\right)(x) = \left(P(\lambda)\right) . x$$

Or $P(f) = 0$, alors $P(\lambda) . x = 0$

$$\Rightarrow P(\lambda) = 0, \quad \text{car } x \neq 0$$

2) Polynômes annulateurs en dimension finie

a) Polynôme minimal

Dans ce paragraphe, E est de dim finie $n \geq 1$

Prop 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Il existe un polynôme non nul annulant f.
2) L'idéal des polynômes annulateurs de f est différent de $\{0\}$.

Démo

1) On a $\dim(E) = n$, donc $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$.

La famille $(I_E, f, \dots, f^{n^2})$ est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$, car son cardinal dépasse $\dim(\mathcal{L}(E))$.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Il existe } a_0, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}, \text{ non tous nuls tels que} \\ \sum_{k=0}^{n^2} a_k f^k = 0 \end{array} \right)$$

Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n^2} a_k X^k$ convient

Car $\begin{cases} P(f) = 0 \\ P \neq 0 \end{cases}$ $\square$

2) Claire.

NB

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a de même :

1) Il existe un polynôme non nul annulant A.
2) L'idéal des polynômes annulateurs de A est différent de $\{0\}$.

Corollaire de définition 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Il existe un unique polynôme unitaire Π_f, vérifiant :

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\} = \Pi_f \cdot \mathbb{K}[X]$$

2) Π_f s'appelle le polynôme minimal de f.

Démo

1) Existence :

Notons $I = \{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(f) = 0\}$.

I est un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$, et $I \neq \{0\}$.

$\Rightarrow$ (Il existe $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tq $I = A \cdot \mathbb{K}[X]$)

Notons $\Pi_f = \dfrac{A}{\mathrm{cd}(A)}$; $\mathrm{cd}(A)$ étant le coeff domin de A.

Alors $\boxed{\begin{array}{l} \Pi_f \text{ est unitaire} \\ I = \Pi_f \cdot \mathbb{K}[X] \end{array}}$ $\square$

Unicité :

Supposons l'existence d'un polynôme unitaire B vérifiant :

$$I = B \cdot \mathbb{K}[X]$$

Mq que $B = \Pi_f$:

On a $B \cdot \mathbb{K}[X] = \Pi_f \cdot \mathbb{K}[X]$

$\Rightarrow$ B et Π_f sont associés.

$\Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ B = \lambda \cdot \Pi_f)$

En considérant les coéfficients dominants, on tire $\lambda = 1$.

D'où $\boxed{B = \pi_f}$ $\square$

NB :

On a de même pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$:

1) Il existe un unique polynôme unitaire π_A, vérifiant :

$$\{P \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(A) = 0\} = \pi_A \cdot \mathbb{K}[X]$$

2) π_A s'appelle le polynôme minimal de A.

À retenir ⚠

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a :

1) $\pi_f(X)$ est unitaire.

2) $\pi_f(f) = 0$.

3) $P(f) = 0 \iff \pi_f \,/\, P$

4) Si $\begin{pmatrix} P(f) = 0 \\ P \neq 0 \end{pmatrix}$ alors $\deg(\pi_f) \leq d^\circ(P)$

⚠ 5) Si $\begin{pmatrix} P(f) = 0 \\ \deg(P) < \deg(\pi_f) \end{pmatrix}$ alors $P = 0$

NB :

Mêmes résultats pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$:

1) $\pi_A(X)$ est unitaire.

2) $\pi_A(A) = 0$.

3) $P(A) = 0 \iff \pi_A \,/\, P$

4) Si $\begin{pmatrix} P(A)=0 \\ P\neq 0 \end{pmatrix}$ alors $\deg(\pi_A) \leqslant d^\circ(P)$

5) Si $\begin{pmatrix} P(A)=0 \\ \deg(P) < \deg(\pi_A) \end{pmatrix}$ alors $P=0$

Prop 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $d = \deg(\pi_f)$.

Rappelons que $\mathbb{K}[f] = \{P(f) \,/\, P \in \mathbb{K}[X]\}$. On a :

1) $(I_E, f, \dots, f^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$.

2) $\dim(\mathbb{K}[f]) = d$.

Démo

1) $(I_E, f, \dots, f^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[f]$?

(i) Mq $(I_E, f, \dots, f^{d-1})$ est une f^{lle} génératrice de $\mathbb{K}[f]$:

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Mq $P(f)$ est combinaison linéaire de $I_E, f, \dots, f^{d-1}$.

Faisons la division euclidienne de $P(X)$ par $\pi_f(X)$:

$$\Longrightarrow \begin{cases} P(X) = \pi_f(X) \cdot Q(X) + (a_0 + a_1 X + \dots + a_{d-1} X^{d-1}) \\ \text{où } Q(X) \in \mathbb{K}[X] \text{ et } a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{K} \end{cases}$$

D'où $P(f) = \underbrace{\pi_f(f)}_{=0} \circ Q(f) + (a_0 I_E + a_1 f + \dots + a_{d-1} f^{d-1})$

$$\Longrightarrow \boxed{P(f) = a_0 I_E + a_1 f + \dots + a_{d-1} f^{d-1}} \quad \square$$

(ii) Mq que $(I_E, f, \dots, f^{d-1})$ est une famille libre de $\mathbb{K}[f]$:

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{d-1} a_k f^k = 0$.

Rappel $\boxed{d = \deg(\pi_f)}$

Mq que : $(\forall\, 0 \leq k \leq d-1,\ a_k = 0)$

Notons $P(X) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$.

On a $\left|\begin{array}{l} P(f) = 0 \\ \deg(P) < \deg(\pi_f) \end{array}\right.$

D'où $P = 0$

C.à.d : $\boxed{\forall\, 0 \leq k \leq d-1,\ a_k = 0}$ $\square$

2) OK

NB :

Mêmes résultats pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

Notons $d = \deg(\pi_A)$.

Rappelons que $\mathbb{K}[A] = \{P(A) / P \in \mathbb{K}[X]\}$. On a :

1) $(I_E, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[A]$.

2) $\dim(\mathbb{K}[A]) = d$.

b) Théorème de Cayley-Hamilton

Prop 1 (Théorème de Cayley-Hamilton)

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\chi_f(f) = 0$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\chi_A(A) = 0$$

Autrement dit

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (resp. une matrice) en est un polynôme annulateur.

Démo Non exigible.

Corollaire 2

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a

$$\pi_f(X) \,/\, \chi_f(X)$$

2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\pi_A(X) \,/\, \chi_A(X)$$

Démo

On a $\chi_f(f) = 0 \Rightarrow \pi_f(X) \,/\, \chi_f(X)$

Corollaire 3

Les valeurs propres d'un endomorphisme (resp. une matrice) sont exactement les racines de son polynôme minimal.

Démo

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. M.q. :

$$\lambda \in Sp(f) \iff \pi_f(\lambda) = 0$$

$(\Longrightarrow)$ Soit $\lambda \in Sp(f)$. On a $\pi_f(X)$ est un polynôme annulateur de f.

Donc $\Pi_f(\lambda)=0$

$(\Leftarrow)$

Supp que $\Pi_f(\lambda)=0$

On a $\Pi_f \,/\, \chi_f \Rightarrow \left(\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ \chi_f(X) = \Pi_f(X)\, Q(X)\right)$

$$\Rightarrow \chi_f(\lambda) = \underbrace{\Pi_f(\lambda)}_{=0} \cdot Q(\lambda)$$

$$\Rightarrow \chi_f(\lambda) = 0$$

D'où $\lambda \in Sp(f)$

c) Théorème de décomposition des noyaux

Prop 1 (Théorème de décomposition des noyaux)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soient P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. On a :

$$\ker\left(P(f)\circ Q(f)\right) = \ker(P(f)) \oplus \ker(Q(f))$$

Démo

On a $P \wedge Q = 1 \underset{\text{Bezout}}{\Rightarrow} \left(\exists U, V \in \mathbb{K}[X],\ PU + QV = 1\right)$

$$\Rightarrow \boxed{P(f)\circ U(f) + Q(f)\circ V(f) = I_E}$$ ☆

1) $\ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)) = \{0\}$?

Soit $x \in \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f))$. Mq que $x=0$

On a $P(f)(x) = Q(f)(x) = 0$.

Et $\star \Rightarrow \underbrace{P(f)\big(U(f)(x)\big)}_{=U(f)(P(f)(x))=0} + \underbrace{Q(f)\big(V(f)(x)\big)}_{=V(f)(Q(f)(x))=0} = x$

$\Rightarrow x = 0$

2) Soit $x \in \ker(P(f)\,Q(f))$. M qu'il existe $x_1 \in \ker(P(f))$ et $x_2 \in \ker(Q(f))$ tels que $x = x_1 + x_2$.

On a $P(f)\big(Q(f)(x)\big) = 0$

D'autre part :

$\star \Rightarrow \underbrace{P(f)\big(U(f)(x)\big)}_{\in \ker(Q(f))} + \underbrace{Q(f)\big(V(f)(x)\big)}_{\in \ker(P(f))} = x$

Car $Q(f)\big(P(f)U(f)(x)\big) =$

$U(f)\big(\underbrace{Q(f)P(f)(x)}_{=0}\big) = 0$

puisque $U(f), P(f)$ et $Q(f)$ commutent $\square$

Corollaire 2 (Théorème de décomposition des noyaux)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $s \geq 2$.

Soient $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux.

On a :

$$\boxed{\ker\big(P_1(f) \circ \dots \circ P_s(f)\big) = \ker(P_1(f)) \oplus \dots \oplus \ker(P_s(f))}$$

Démo

Par récurrence sur $s \geq 2$, et en utilisant la (Prop 1).

On utilisera :

Si $(\forall 1 \leq i \leq r,\ A \wedge B_i = 1)$ alors $A \wedge \left(\prod_{i=1}^{r} B_i\right) = 1$

Clés pratiques à retenir

1) $\forall a \neq b,\ (X-a) \wedge (X-b) = 1$

2) Si $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux, alors les polynômes $(X-a_1), \dots, (X-a_s)$ sont deux à deux premiers entre eux.

3) Si $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}$ distincts deux à deux, alors les polynômes $(X-a_1)^{m_1}, \dots, (X-a_s)^{m_s}$ sont deux à deux premiers entre eux.

De ces clés, on a les réflexes pratiques suivants :

Réflexes pratiques à retenir

1) **Réflexe 1 :**

Si $(f-aI_E)(f-bI_E)=0$, où $a \neq b$, On a :

$$E = \ker(f-aI_E) \oplus \ker(f-bI_E)$$

Justification

$$E = \ker(0)$$
$$= \ker\left((f-aI_E)\circ(f-bI_E)\right)$$
$$= \ker(f-aI_E) \oplus \ker(f-bI_E)$$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, puisque $(X-a)$ et $(X-b)$ premiers entre eux car $a \neq b$.

2) Réflexe 2

Si $(f-a_1 I_E)\circ\cdots\circ(f-a_s I_E)=0$, où les a_i sont distincts deux à deux.

Alors :

$$E=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker(f-a_i I_E)$$

Justification

$$E=\ker(0)$$

$$=\ker\left((f-a_1 I_E)\circ\cdots\circ(f-a_s I_E)\right)$$

$$=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker(f-a_i I_E)$$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, puisque les $(X-a_i)$ sont deux à deux premiers entre eux, du fait que les a_i sont distincts deux à deux.

3) Réflexe 3

Si $(f-a_1 I_E)^{m_1}\circ\cdots\circ(f-a_s I_E)^{m_s}=0$, où les a_i sont distincts deux à deux.

Alors :

$$E=\bigoplus_{i=1}^{s}\ker\left((f-a_i I_E)^{m_i}\right)$$

Justification

$$E=\ker(0)$$

$$= \ker\left((f - a_1 I_E)^{m_1} \circ \dots \circ (f - a_s I_E)^{m_s}\right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{s} \ker\left((f - a_i I_E)^{m_i}\right)$$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, puisque les $(X - a_i)^{m_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, du fait que les a_i sont distincts deux à deux.

Autres Réflexes pratiques à retenir

1) Réflexe 1 :

Si $\chi_f(X) = (X - a)(X - b)$, où $a \neq b$, On a :

$$E = \ker(f - a I_E) \oplus \ker(f - b I_E)$$

Justification

$$E = \ker(0)$$

$$= \ker(\chi_f(f)) \quad \text{(d'après Cayley-Hamilton)}$$

$$= \ker\left((f - a I_E) \circ (f - b I_E)\right)$$

$$= \ker(f - a I_E) \oplus \ker(f - b I_E)$$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, puisque $(X-a)$ et $(X-b)$ premiers entre eux car $a \neq b$.

2) Réflexe 2

Si $\chi_f(X) = (X-a_1)\cdots\cdots(X-a_s)$, où les a_i sont distincts deux à deux.

Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(f - a_i I_E)$$

Justification

$$\begin{aligned}E &= \ker(0)\\ &= \ker(\chi_f(f)) \quad (\text{d'après Cayley-Hamilton})\\ &= \ker\big((f-a_1 I_E)\circ\cdots\circ(f-a_s I_E)\big)\\ &= \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(f-a_i I_E)\end{aligned}$$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, puisque les $(X-a_i)$ sont deux à deux premiers entre eux, du fait que les a_i sont distincts deux à deux.

3) Réflexe 3

Si $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{s}(X-a_i)^{m_i}$, où les a_i sont distincts deux à deux.

Alors :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker\left((f-a_i I_E)^{m_i}\right)$$

Justification

$$E = \ker(0)$$
$$= \ker(\chi_f(f)) \quad \text{(d'après Cayley-Hamilton)}$$
$$= \ker\left((f-a_1 I_E)^{m_1} \circ \dots \circ (f-a_s I_E)^{m_s}\right)$$
$$= \bigoplus_{i=1}^{s} \ker\left((f-a_i I_E)^{m_i}\right)$$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, puisque les $(X-a_i)^{m_i}$ sont deux à deux premiers entre eux, du fait que les a_i sont distincts deux à deux.

NB 1

Ces derniers réflexes sont valables si on remplace $\chi_f(X)$ par $\pi_f(X)$.

NB 2

Tous ces réflexes sont valables pour les matrices.

Exemples immédiats

Montrer via le théorème de décomposition des noyaux que :

1) Si f est un projecteur alors :
$$E = \ker f \oplus \ker(f - I_E)$$

2) Si f est une symétrie alors :
$$E = \ker(f - I_E) \oplus \ker(f + I_E)$$

3) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$, alors :

$$M_{n1}(\mathbb{R}) = \ker(A) \oplus \ker(A^2 + I_n)$$

3) Application des polynômes d'endomorphismes à la réduction

Supp que : $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$

Notation

Notons pour chaque $1 \leq i \leq s$, p_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} F_j$.

Vocabulaire

$p_1, \cdots, p_s$ s'appellent les projecteurs adaptés à la décomposition

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_s$$

Prop 1

Gardons les mêmes notations que ci-dessus, on a :

1) $\forall i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$

2) $\sum_{i=1}^{s} p_i = I_E$

Démo

1) Soit $x \in E$, $(p_i \circ p_j)(x) = p_i\left(p_j(x)\right)$

$= 0$, car $p_j(x) \in \bigoplus_{k \neq i} F_k$

2) Soit $x \in E$.

On a $x = \sum_{i=1}^{s} x_i$, où $x_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1, s]\!]$.

$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{s} p_i(x)$

D'où $I_E = \sum_{i=1}^{s} p_i$ $\square$

NB

On retrouve le cas particulier vu au Sup :

Si $E = F \oplus G$

p_F : le projecteur sur F parallèlement à G.

p_G : le projecteur sur G parallèlement à F.

Alors $p_F \circ p_G = 0$

$p_F + p_G = I_E$

Prop 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Supp que f est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ distinctes deux à deux.

Notons $p_1, \dots, p_s$ les projecteurs adaptés à la décomposition

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}$$

On a :

1) $f = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$

2) $\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ Q(f) = \sum_{i=1}^{s} Q(\lambda_i) p_i$

Démo

1) $f = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$?

Soit $x = \sum_{i=1}^{s} x_i \in E$, où $x_i \in E_{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, s]\!]$.

$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{s} f(x_i)$

$$= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i \qquad (\text{car } x_i \in E_{\lambda_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i(x) \qquad (\text{car } p_i(x) = x_i)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i\right)(x)$$

2) Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$, mq que $Q(f) = \sum_{i=1}^{s} Q(\lambda_i) p_i$

Soit $x = \sum_{i=1}^{s} x_i \in E$, où $x_i \in E_{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, s]\!]$.

On a :

$$\big(Q(f)\big)(x) = \sum_{i=1}^{s} \big(Q(f)\big)(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} \big(Q(\lambda_i)\big) \cdot x_i \qquad (\text{car } f(x_i) = \lambda_i x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} Q(\lambda_i) p_i(x)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{s} Q(\lambda_i) p_i\right)(x) \qquad \square$$

Prop 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

2) Il existe un polynôme annulateur de f, scindé dans $\mathbb{K}$ et à racines simples.

3) $\Pi_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ à racines simples.

Démo

1) $\Longrightarrow$ 2)

Supp que f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

M.q. qu'il existe un polynôme annulateur de f, scindé dans $\mathbb{K}$ et à racines simples.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les valeurs propres de f, distinctes 2 à 2.

Le polynôme $Q(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$ convient ; en effet :

$\rightsquigarrow$ $Q(X)$ est bien scindé dans $\mathbb{K}$ et à racines simples.

$\rightsquigarrow$ $Q(f) = \sum_{i=1}^{s} \underbrace{Q(\lambda_i)}_{=0} P_i$ (avec les notations ci-dessus).

$= 0$ $\square$

2) $\Longrightarrow$ 3)

Supp qu'il existe un polynôme annulateur de f, scindé dans $\mathbb{K}$ et à racines simples.

Notons-le $Q(X)$.

$Q(f) = 0 \Longrightarrow \pi_f(X) / Q(X)$

Or $Q(X)$ scindé à racines simple alors $\pi_f(X)$ l'est aussi. $\square$

3) $\Longrightarrow$ 1)

Supp que $\pi_f(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ à racines simples.

et montrons que f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.

On a $\pi_f(X) = \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)$, où les λ_i sont dans $\mathbb{K}$ distincts deux à deux.

$\lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont exactement les valeurs propres de f, comme racines du polynôme minimal.

D'autre part, on a :

$E = \ker(0)$
$= \ker(\pi_f(f))$ $(\pi_f(f) = 0)$

$$= \ker\left(\prod_{i=1}^{s}(f-\lambda_i\cdot id_E)\right)$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(f-\lambda_i\, id_E)$$, d'après le théorème de décomposition des noyaux, vu que les $(X-\lambda_i)$ sont deux à deux premiers entre eux, car les λ_i sont distinct 2 à 2.

Ainsi $$\boxed{E = \bigoplus_{i=1}^{s} \ker(f-\lambda_i\, id_E)}$$

D'où f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$. □

NB :

On a de même pour les matrices :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$.
2) Il existe un polynôme annulateur de A, scindé dans $\mathbb{K}$ et à racines simples.
3) $\pi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}$ à racines simples.

Exercice d'application 1

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Justifier que f est diagonalisable dans chacun des cas suivants :

1) f projecteur de E.
2) f symétrie de E.

Exercice d'application 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Justifier que A est diagonalisable dans chacun des cas suivants :

1) $A^2 - 3A + 2I_n = 0$

2) $A^p = I_n$; où $p \geq 2$.

4) Polynôme minimal d'un endomorphisme induit

IG

- $f \in \mathcal{L}(E)$
- F sev stable par f
- f_F l'endomorphisme induit par f sur F

Prop

1) $\Pi_{f_F}(x) \mid \Pi_f(x)$

2) Si f est diagonalisable dans $\mathbb{K}$, alors f_F l'est aussi.

Démo

1) On a $\Pi_f(f) = 0 \Rightarrow \Pi_f(f_F) = 0$

$$\Rightarrow \Pi_{f_F}(x) \mid \Pi_f(x) \quad \square$$

2) f diagonalisable dans $\mathbb{K}$ $\Rightarrow \Pi_f(x)$ scindé à racines simples

$\Rightarrow \Pi_{f_F}(x)$ aussi car $\Pi_{f_F} \mid \Pi_f$

$\Rightarrow f_F$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ $\square$

Fin