Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire

Exercice 1 [03480] [Correction]
On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $\varphi \colon E \times E \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier que l'application φ est bien définie de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$.
b) Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur E.
c) Pour $p, q \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
d) Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.

Exercice 2 [03322] [Correction]
Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et $\varphi \colon E \times E \to \mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\varphi(x, y) = \langle x, y\rangle + k\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 3 [04092] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + f(1)g(0) + f(0)g(1)$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Calculs dans un espace préhilbertien réel

Exercice 4 [00505] [Correction]
Démontrer que la boule unité fermée B d'un espace préhilbertien réel est strictement convexe *i.e.* que pour tout $x, y \in B$ différents et tout $t \in]0;1[$, $\|(1-t)x + ty\| < 1$.

Exercice 5 [00511] [Correction]
On munit $E = \mathcal{C}([a;b], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

En exploitant le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass, établir que l'orthogonal du sous-espace vectoriel F de E formé des fonctions polynomiales est réduit à $\{0\}$.

Exercice 6 [00513] [Correction]
Soit E un espace préhilbertien réel.
a) Établir que pour tout sous-espace vectoriel F de E, $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$.
Désormais, on suppose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$(P \mid Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Montrer que

$$H = \left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \int_{-1}^1 |t|\,P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$$

est un hyperplan fermé de E.
c) Soit $Q \in H^\perp$. Établir que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-1}^1 |t|\,P(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-1}^1 Q(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

d) Établir que $H^\perp = \{0\}$ et conclure qu'ici l'inclusion $\bar{H} \subset H^{\perp\perp}$ est stricte.

Exercice 7 [03318] [Correction]
Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E.
On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1, -1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right\| \le M$$

Montrer

$$\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \le M^2$$

Exercice 8 [03321] [Correction]
On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour $f \in E$, on note F la primitive de f qui s'annule en 0

$$\forall x \in [0\,;1], F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'endomorphisme v de E déterminé par $v(f) = F$.

a) Déterminer un endomorphisme v^* vérifiant

$$\forall f, g \in E, \langle v(f), g\rangle = \langle f, v^*(g)\rangle$$

b) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v^* \circ v$.

Exercice 9 [03325] [Correction]
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E. Établir

$$F^\perp = \bar{F}^\perp$$

Exercice 10 [00351] [Correction]
Soient $e = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $f = (f_j)_{1\leq j\leq n}$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(f_i \mid u(e_j)\right)^2$$

Montrer que A ne dépend pas des bases orthonormales choisies

Exercice 11 [03979] [Correction]
Soient a, b deux vecteurs unitaires d'un espace euclidien E.
Déterminer le maximum sur la boule unité fermée de $f\colon x \mapsto (a \mid x)\,(b \mid x)$

Représentation d'une forme linéaire

Exercice 12 [02666] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer l'existence et l'unicité de $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Établir que A est de degré n.

Exercice 13 [03024] [Correction]
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ le produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \langle A, P\rangle ?$$

Exercice 14 [01573] [Correction]
Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
b) Soit $\theta\colon E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\theta(P) = P(0)$.
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme Q tel que pour tout $P \in E$ on ait $\theta(P) = \varphi(P, Q)$.

Polynômes orthogonaux

Exercice 15 [03079] [Correction]
On définit

$$Q_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

a) Soit $n \geq 1$. Montrer que Q_n possède n racines simples dans $]-1\,;1[$.
b) Montrer que

$$Q_n = X^n + (X^2-1)R_n(X)$$

avec $R_n \in \mathbb{R}[X]$. En déduire $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.

c) On pose, pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

d) Calculer $\|Q_n\|^2$.

Exercice 16 [03657] [Correction]
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Établir l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes (P_n) formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient dominant 1.
b) Étudier la parité des polynômes P_n.
c) Prouver que pour chaque $n \geq 1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est élément de l'orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
d) En déduire alors qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_{n+1} = XP_n + \lambda_n P_{n-1}$$

Exercice 17 [01332] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : (P,Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier la définition de $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.
On pose $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$. On cherche à déterminer $d(1,F)$. On note $(P_0,\ldots,P_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(1,X,\ldots,X^n)$.
b) Calculer $P_k(0)^2$.
c) Déterminer une base de $F^\perp$ que l'on exprimera dans la base $(P_0,\ldots,P_n)$. En déduire $d(1,F^\perp)$ et $d(1,F)$.

Exercice 18 [04133] [Correction]
Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0\,;1],\mathbb{R})$ on définit le produit scalaire

$$\forall f,g \in E,\ (f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer qu'il existe une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n \text{ et } \forall m,n \in \mathbb{N}, (P_m \mid P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) On fixe n dans $\mathbb{N}$ et on admet que le polynôme P_n admet exactement n racines distinctes dans l'intervalles $]0\,;1[$ que l'on énumère : $\omega_1,\ldots,\omega_n$. On pose, pour tout $f \in E$,

$$E(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\omega_k)$$

avec les λ_k réels à déterminer. Montrer qu'il est possible de choisir les λ_k de manière à ce que, pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n, on ait $E(P) = 0$.
c) Pour les λ_k choisis ci-dessus, montrer que l'on a en fait $E(P) = 0$ pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à $2n$.
d) Commentaire ?

Familles obtusangles

Exercice 19 [03157] [Correction]
Soit $\mathcal{F} = (x_1,\ldots,x_n)$ une famille de $n \geq 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien réel. On suppose

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n, (x_i \mid x_j) < 0$$

Montrer que toute sous famille de $n-1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre.

Exercice 20 [01574] [Correction]
[Famille obtusangle] Soit $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il est impossible que

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+2, (x_i \mid x_j) < 0$$

Exercice 21 [00520] [Correction]
Soient $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$ des vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il est impossible que

$$\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$$

On pourra commencer par les cas $n = 1$ et $n = 2$

Eléments propres d'endomorphismes euclidiens

Exercice 22 [00517] [Correction]
Soit a un vecteur normé d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme

$$f_\alpha : x \mapsto x + \alpha\,(a \mid x)\,a$$

a) Préciser la composée $f_\alpha \circ f_\beta$. Quelles sont les f_α bijectives ?
b) Déterminer les éléments propres de f_α.

Exercice 23 [00518] [Correction]
Soient a, b deux vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien E et f l'application de E vers E donnée par

$$f : x \mapsto x - (a \mid x)\,b$$

a) À quelle condition la fonction f est-elle bijective ?
b) Exprimer $f^{-1}(x)$ lorsque c'est le cas.
c) À quelle condition l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Projections orthogonales

Exercice 24 [01595] [Correction]
Soit p une projection d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que la projection p est orthogonale si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Exercice 25 [03924] [Correction]
Soit p un projecteur d'un espace euclidien E vérifiant

$$\forall x \in E, \langle p(x), x\rangle \geq 0$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 26 [00524] [Correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n muni d'une base orthonormée e et F un sous-espace vectoriel de E muni d'une base orthonormée $(x_1, \ldots, x_p)$. Montrer que la matrice de p_F dans la base e est

$$\sum_{k=1}^{p} X_k {}^t X_k$$

où X_k est la colonne des coordonnées du vecteur x_k dans e.

Exercice 27 [03766] [Correction]
On pose $E = \mathcal{C}^1([0\,;1], \mathbb{R})$ et

$$\forall f, g \in E, \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
b) On pose

$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \left\{f \in E \mid f \text{ est } \mathcal{C}^2 \text{ et } f'' = f\right\}$$

Montrer que V et W sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la projection orthogonale sur W.
c) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$$E_{\alpha,\beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$$

Calculer

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t$$

Exercice 28 [00529] [Correction]
On définit une application $\varphi\colon \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer $\varphi(X^p, X^q)$.

c) Déterminer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at+b))^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 29 [02735] [Correction]
Calculer

$$\inf\left\{\int_0^1 t^2(\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t, (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Familles totales

Exercice 30 [00530] [Correction]
[Formule de Parseval] On suppose que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale totale d'un espace préhilbertien E. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |(e_n \mid x)|^2$$

Produit scalaire et transposition matricielle

Exercice 31 [03937] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer d'une part les espaces

$$\ker A \text{ et } \ker({}^tAA)$$

et d'autre part les espaces

$$\operatorname{Im} A \text{ et } \operatorname{Im}(A\,{}^tA)$$

Exercice 32 [03935] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$.

a) Établir

$$\ker({}^tA + A) = \ker(A) \cap \ker({}^tA)$$

b) En déduire

$${}^tA + A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \iff \operatorname{Im} A = \ker A$$

Exercice 33 [03936] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \le \|X\|$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.
Établir

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \left\|{}^tAX\right\| \le \|X\|$$

Exercice 34 [03938] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\| \le \|X\|$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur l'espace des colonnes.

a) Établir

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \left\|{}^tAX\right\| \le \|X\|$$

b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $AX = X$ alors ${}^tAX = X$

c) Établir

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n)$$

Exercice 35 [00354] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir

$$\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg} A$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $f : t \mapsto P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et intégrable car $t^2 f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) L'application φ est clairement bilinéaire symétrique et positive.
Si $\varphi(P, P) = 0$ alors par intégration d'une fonction continue positive on obtient
$$\forall t \in [0\,;+\infty[, P(t)^2\,\mathrm{e}^{-t} = 0$$
et donc P admet une infinité de racines (les éléments de $[0\,;+\infty[$), c'est donc le polynôme nul.

c) Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ de sorte que $\varphi(X^p, X^q) = I_{p+q}$.
Par intégration par parties impropre justifiée par la convergence du crochet
$$\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^n\,\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
Ainsi, $I_n = nI_{n-1}$. Sachant $I_0 = 1$, on conclut $I_n = n!$ et
$$\varphi(X^p, X^q) = (p+q)!$$

d) Notons que la famille $(1, X, X^2)$ est libre et qu'il est donc licite de l'orthonormaliser par le procédé de Schmidt. On pose $P_0 = 1$.
On cherche $P_1 = X + \lambda P_0$ avec $(P_0 \mid P_1) = 0$ ce qui donne $1 + \lambda = 0$ et donc $P_1 = X - 1$.
On cherche $P_2 = X^2 + \lambda P_0 + \mu P_1$ avec $(P_0 \mid P_2) = 0$ et $(P_1 \mid P_2) = 0$ ce qui donne $2 + \lambda = 0$ et $4 + \mu = 0$ donc $P_2 = X^2 - 4X + 2$.
La famille orthonormalisée cherchée et alors (Q_0, Q_1, Q_2) avec
$$Q_0 = 1, Q_1 = X - 1 \text{ et } Q_2 = \frac{1}{2}\left(X^2 - 4X + 2\right)$$

Exercice 2 : [énoncé]
Il est immédiat que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
On a
$$\varphi(x, x) = \|x\|^2 + k\,\langle x, a\rangle^2$$
En particulier
$$\varphi(a, a) = \|a\|^2 + k\,\|a\|^4 = (1 + k)$$
Pour que la forme bilinéaire symétrique φ soit définie positive, il est nécessaire que $1 + k > 0$.
Inversement, supposons $1 + k > 0$.
Si $k \geq 0$ alors $\varphi(x, x) \geq \|x\|^2$ et donc
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \varphi(x, x) > 0$$
Si $k \in\,]-1\,;0[$, $k = -\alpha$ avec $\alpha \in\,]0\,;1[$ et
$$\varphi(x, x) = \|x\|^2 - \alpha\,\langle x, a\rangle^2$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\langle x, a\rangle^2 \leq \|x\|^2\,\|a\|^2 = \|x\|^2$$
donc
$$\varphi(x, x) \geq \|x\|^2 - \alpha\,\|x\|^2 = (1-\alpha)\,\|x\|^2$$
de sorte que
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \varphi(x, x) > 0$$
Ainsi φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire.
Finalement, φ est un produit scalaire si, et seulement si, $1 + k > 0$.

Exercice 3 : [énoncé]
L'application φ est bien définie de $E \times E \to \mathbb{R}$ et clairement bilinéaire et symétrique.
Soit $f \in E$.
$$\varphi(f, f) = \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t + 2f(0)f(1)$$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$\left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$
et donc
$$\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geq (f(1) - f(0))^2$$
puis
$$\varphi(f, f) \geq f(1)^2 + f(0)^2 \geq 0$$
Au surplus, si $\varphi(f, f) = 0$ alors $f(0) = f(1) = 0$, mais aussi $\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction f est donc constante égale à 0.

Exercice 4 : [énoncé]
Par l'inégalité triangulaire

$$\|(1-t)x+ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| \leq 1$$

De plus, s'il y a égalité alors $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ et les vecteurs $(1-t)x$ et ty sont positivement liés.
Les vecteurs x et y étant unitaires et positivement liés, ils sont égaux. Ceci est exclu.

Exercice 5 : [énoncé]
Soit $f \in F^\perp$. Puisque f est continue sur le segment $[a\,;b]$, par le théorème d'approximation uniforme de Weierstrass :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \|f-P\|_{\infty,[a;b]} \leq \varepsilon$$

On a alors

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2 = \int_a^b f(f-P) + \int_a^b fP = \int_a^b f(f-P)$$

avec

$$\left|\int_a^b f(f-P)\right| \leq (b-a)\|f\|_\infty \|f-P\|_\infty \leq (b-a)\|f\|_\infty \varepsilon$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\|f\|^2 = 0$ donc $f = 0$. Ainsi $F^\perp \subset \{0\}$ puis $F^\perp = \{0\}$.

Exercice 6 : [énoncé]

a) On sait $F \subset F^{\perp\perp}$ et $F^{\perp\perp}$ fermé donc $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$.

b) H est le noyau de la forme linéaire

$$\varphi\colon P \mapsto \int_{-1}^1 |t|\,P(t)\,\mathrm{d}t$$

En vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\varphi(P)| \leq \|P\|$ et donc φ est continue.
Par suite H est un hyperplan fermé.

c) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on observe que

$$R = P - \int_{-1}^1 |u|\,P(u)\,\mathrm{d}u$$

appartient à H. La relation $(R \mid Q) = 0$ donne la relation voulue.

d) La relation précédente donne

$$\int_{-1}^1 \left(Q(t) - |t|\int_{-1}^1 Q(u)\,\mathrm{d}u\right) P(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Par suite

$$Q(t) = |t|\int_{-1}^1 Q(u)\,\mathrm{d}u$$

Ceci n'est possible dans $\mathbb{R}[X]$ que si $\int_{-1}^1 Q(u)\,\mathrm{d}u = 0$ et donc seulement si $Q = 0$.
Ainsi $H^\perp = \{0\}$ puis $H^{\perp\perp} = E$ alors que $\bar{H} = H \neq E$.

Exercice 7 : [énoncé]
Cas $n = 1$, c'est immédiat.
Cas $n = 2$:
Si $\|x+y\| \leq M$ et $\|x-y\| \leq M$ alors

$$\|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \leq M^2 \text{ et } \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2 \leq M^2$$

Si $(x \mid y) \geq 0$ alors première identité donne $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq M^2$, si $(x \mid y) \leq 0$, c'est la deuxième identité qui permet de conclure.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$.
Supposons

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{1,-1\}^{n+1}, \left\|\sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k x_k\right\| \leq M$$

Par l'étude du cas $n = 2$ appliquée au vecteur

$$x = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \text{ et } y = x_{n+1}$$

on obtient

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{1,-1\}^n, \left\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 \leq M^2$$

donc

$$\forall(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{1,-1\}^n,\left\|\sum_{k=1}^n\varepsilon_k x_k\right\|\le\sqrt{M^2-\|x_{n+1}\|^2}$$

Par hypothèse de récurrence

$$\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2\le M^2-\|x_{n+1}\|^2$$

et l'on peut conclure.
Récurrence établie.

Exercice 8 : [énoncé]

a) Par intégration par parties

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x=F(1)G(1)-\int_0^1 f(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui se réécrit

$$\int_0^1 F(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\left(G(1)-G(x)\right)\mathrm{d}x$$

Ainsi pour

$$v^*(g)\colon x\mapsto G(1)-G(x)=\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

on vérifie que v^* est un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall f,g\in E,\langle v(f),g\rangle=\langle f,v^*(g)\rangle$$

b) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f\in E$ vérifiant $(v^*\circ v)(f)=\lambda f$.
La fonction f est nécessairement dérivable et vérifie

$$\begin{cases}\lambda f(1)=0\\ v(f)(x)=-\lambda f'(x)\end{cases}$$

La fonction f est donc nécessairement deux fois dérivable et vérifie

$$\begin{cases}\lambda f(1)=0\\ \lambda f'(0)=0\\ f(x)=-\lambda f''(x)\end{cases}$$

Si $\lambda=0$ alors $f=0$ et donc λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda>0$ alors en écrivant $\lambda=1/\sqrt{\omega}$, l'équation différentielle $\lambda y''+y=0$ donne la solution générale

$$y(t)=\alpha\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t)$$

La condition $f'(0)=0$ donne $\beta=0$ et la condition $f(1)=0$ donne $\alpha\cos(\omega)=0$.
Si $\omega\notin\pi/2+\pi\mathbb{N}$ alors $f=0$ et $\lambda=1/\sqrt{\omega}$ n'est pas valeur propre.
En revanche, si $\omega\in\pi/2+\pi\mathbb{N}$, alors par la reprise des calculs précédents donne $\lambda=1/\sqrt{\omega}$ valeur propre associé au vecteur propre associé $f(x)=\cos(\omega x)$.
Si $\lambda<0$ alors la résolution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants avec les conditions proposées donne $f=0$ et donc λ n'est pas valeur propre.

Exercice 9 : [énoncé]
Puisque $F\subset\bar{F}$, on a déjà

$$\bar{F}^\perp\subset F^\perp$$

Soit $a\in F^\perp$.
Pour tout $x\in\bar{F}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de F telle que $x_n\to x$.
Puisque

$$\forall n\in\mathbb{N},\langle x_n,a\rangle=0$$

à la limite (le produit scalaire étant continue)

$$\langle x,a\rangle=0$$

et donc $a\in\bar{F}^\perp$.
Finalement, par double inclusion $F^\perp=\bar{F}^\perp$.

Exercice 10 : [énoncé]
Puisque la base f est orthonormale, on a

$$A=\sum_{j=1}^n\|u(e_j)\|^2$$

et donc

$$A=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(e_i\mid u(e_j)\right)^2$$

Notons $M = (m_{i,j})$ la matrice de u dans la base orthonormale e. On a

$$m_{i,j} = (e_i \mid u(e_j))$$

et donc

$$A = \operatorname{tr}\left({}^tMM\right)$$

Si $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base orthonormale de E et si M' est la matrice de u dans e', on peut écrire

$$M' = {}^tPMP \text{ avec } P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

et alors

$$\operatorname{tr}({}^tM'M') = \operatorname{tr}({}^tP{}^tMMP) = \operatorname{tr}({}^tMMP{}^tP) = \operatorname{tr}({}^tMM)$$

Finalement, la quantité A ne dépend ni de choix de f ni de celui de e.

Exercice 11 : [énoncé]
Cas $a = b$:
$f(x) = (a \mid x)^2$ et le maximum cherché est évidemment en a.
Cas $a = -b$:
$f(x) = -(a \mid x)^2$ et le maximum cherché est évidemment en 0.
Cas restants :
Les vecteurs $a + b$ et $a - b$ constituent une famille orthogonale.
Posons

$$e_1 = \frac{a+b}{\|a+b\|}, e_2 = \frac{a-b}{\|a-b\|}$$

Les vecteurs e_1 et e_2 forment une famille orthonormale que le peut compléter en une base orthonormale $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.
Pour x tel que $\|x\| \leq 1$, on peut écrire

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \text{ avec } x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$$

et alors

$$(a \mid x) = x_1\frac{1 + (a \mid b)}{\|a+b\|} + x_2\frac{1 - (a \mid b)}{\|a-b\|}$$

puis

$$f(x) = x_1^2\left(\frac{1 + (a \mid b)}{\|a+b\|}\right)^2 - x_2^2\left(\frac{1 - (a \mid b)}{\|a+b\|}\right)^2$$

Le maximum cherché est pour $x_1 = 1$ et $x_2 = \ldots = x_n = 0$. Il vaut

$$\left(\frac{1 + (a \mid b)}{\|a+b\|}\right)^2$$

Cette formule convient aussi pour les cas initialement isolés.

Exercice 12 : [énoncé]

a) Il est bien connu que l'application

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. L'application $P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$ donc il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que cette forme linéaire corresponde au produit scalaire avec A, ce qui revient à dire

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \langle A, P\rangle = \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t$$

b) Si par l'absurde le degré de A est strictement inférieur à n alors $P = XA$ est élément de $\mathbb{R}_n[X]$ et donc

$$\int_0^1 tA(t)^2\,\mathrm{d}t = P(0) = 0$$

Or la fonction $t \mapsto tA(t)^2$ est continue positive sur $[0\,;1]$ et la nullité de l'intégrale précédente entraîne alors

$$\forall t \in [0\,;1], tA(t)^2 = 0$$

On en déduit $A = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 13 : [énoncé]
Supposons l'existence d'un tel polynôme A et considérons $P(X) = XA(X)$.
On a

$$0 = P(0) = \langle A, P\rangle = \int_0^1 tA(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive, on obtient

$$\forall t \in [0\,;1], tA(t)^2 = 0$$

Le polynôme A admet une infinité de racine, c'est donc le polynôme nul ce qui est absurde.

Exercice 14 : [énoncé]

a) ras

b) Supposons qu'un tel polynôme Q existe et considérons $P = XQ$.
On a $\theta(P) = 0 = \int_0^1 tQ^2(t)\,\mathrm{d}t$ donc $Q = 0$ d'où $\theta = 0$. Absurde.

Exercice 15 : [énoncé]

a) 1 et -1 sont racines de multiplicité n du polynôme $(X^2-1)^n$.
1 et -1 sont donc racines des polynômes

$$(X^2-1)^n, \left((X^2-1)^n\right)', \ldots, \left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$

En appliquant le théorème de Rolle, on peut alors montrer par récurrence sur $k \in \{0,\ldots,n\}$ que $\left((X^2-1)^n\right)^{(k)}$ possède au moins k racines dans l'intervalle $]-1\,;1[$.
En particulier Q_n possède au moins n racines dans $]-1\,;1[$, or $\deg Q_n = n$ donc il n'y a pas d'autres racines que celles-ci et elles sont simples.

b) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$, c'est immédiat.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.

$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left(2(n+1)X(X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

Par la formule de Leibniz

$$Q_{n+1}(X) = \frac{1}{2^n n!}\left(X\left((X^2-1)^n\right)^{(n)} + nX\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}\right)$$

1 et -1 sont racines du polynôme $\left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$ et donc celui-ci peut s'écrire $(X^2-1)S(X)$.
En exploitant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$Q_{n+1}(X) = X^{n+1} + X(X^2-1)R_n(X) + 2nX(X^2-1)S(X) = X^{n+1} + (X^2-1)R_{n+1}(X)$$

Récurrence établie

c) Par intégration par parties successives et en exploitant l'annulation en 1 et -1 des polynômes

$$(X^2-1)^n, \left((X^2-1)^n\right)', \ldots, \left((X^2-1)^n\right)^{(n-1)}$$

on obtient

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P^{(n)}(t)(t^2-1)^n\,\mathrm{d}t$$

En particulier, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$\int_{-1}^{1} P(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

d) Par la relation qui précède

$$\int_{-1}^{1} (Q_n(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1} Q_n^{(n)}(t)(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t$$

Puisque le polynôme $(X^2-1)^n$ est unitaire et de degré $2n$

$$\left[(X^2-1)^n\right]^{(2n)} = (2n)! \text{ et } Q_n^{(n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

De plus, par intégration par parties successives

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n(1+t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Au final

$$\|Q_n\|^2 = \frac{2}{(2n+1)}$$

Exercice 16 : [énoncé]

a) Par récurrence sur $n \geq 0$, établissons l'existence et l'unicité de la sous-famille $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que voulue.
Cas $n = 0$: le polynôme P_0 vaut 1.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.
Les polynômes $P_0, \ldots, P_n$ sont alors déterminés de façon unique par l'hypothèse de récurrence et il reste seulement à former P_{n+1}. Celui-ci peut s'écrire

$$P_{n+1} = X^{n+1} + Q(X) \text{ avec } Q(X) \in \mathbb{R}_n[X]$$

On veut $\langle P_{n+1}, P_k\rangle = 0$ pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$. Le polynôme Q doit donc vérifier

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, (Q(X) \mid P_k) = -\left\langle X^{n+1}, P_k\right\rangle$$

Ces relations détermine entièrement le polynôme Q puisque $(P_0,\ldots,P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$Q = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\left\langle X^{n+1}, P_k\right\rangle}{\|P_k\|^2} P_k$$

Le polynôme P_{n+1} existe donc et est unique.
Récurrence établie.

b) La famille $((-1)^n P_n(-X))$ vérifie les mêmes conditions que celles ayant défini la suite (P_n). On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$$

c) Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.
On peut écrire $Q = \sum_{k=0}^{n-2} a_k P_k$ et donc

$$\langle P_{n+1}, Q\rangle = 0.$$

On peut aussi écrire $XQ = \sum_{k=0}^{n-1} a'_k P_k$ et donc

$$\langle XP_n, Q\rangle = \langle P_n, XQ\rangle = 0.$$

On en déduit

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X], \langle P_{n+1} - XP_n, Q\rangle = 0$$

d) Par simplification des termes de plus haut degré

$$P_{n+1} - XP_n \in \mathbb{R}_n[X]$$

On peut donc écrire

$$P_{n+1} - XP_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$$

Or $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $P_0, \dots, P_{n-2}$ donc

$$P_{n+1} - XP_n = \alpha_n P_n + \alpha_{n-1} P_{n-1}$$

Enfin, par parité, $\alpha_n = 0$ et donc

$$P_{n+1} - XP_n = \alpha_{n-1} P_{n-1}$$

Exercice 17 : [énoncé]

a) Pour $P, Q \in E$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et vérifie

$$t^2 P(t)Q(t)e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$.
On vérifie aisément que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive.
Si $\langle P, P\rangle = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive

$$\forall t \in [0\,;+\infty[, P(t)^2 e^{-t} = 0$$

On en déduit que le polynôme P admet une infinité de racines et donc $P = 0$.

b) Pour $k \geq 1$ ou $k = 0$, on peut affirmer que les polynômes P_k et P'_k sont orthogonaux car

$$P'_k \in \mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_{k-1})$$

Par une intégration par parties

$$0 = \int_0^{+\infty} P'_k(t)P_k(t)e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left[P_k(t)^2 e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} P_k(t)^2 e^{-t}\,dt$$

On en déduit

$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1$$

c) F est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto P(0)$). Son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit Q un vecteur directeur de celle-ci. On peut écrire

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \langle P_k, Q\rangle P_k$$

Or

$$\langle P_k, Q\rangle = \langle P_k - P_k(0), Q\rangle + P_k(0)\langle 1, Q\rangle$$

Puisque le polynôme $P_k - P_k(0)$ est élément de F, il est orthogonal à Q et l'on obtient

$$\langle P_k, Q\rangle = P_k(0)\langle 1, Q\rangle$$

ce qui permet d'écrire

$$Q = \lambda \sum_{k=0}^{n} P_k(0)P_k \text{ avec } \lambda = \langle 1, Q\rangle \neq 0$$

On en déduit

$$d(1, F) = \frac{|\langle 1, Q\rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Enfin par Pythagore

$$\|1\|^2 = d(1, F)^2 + d(1, F^\perp)^2$$

et l'on obtient

$$d(1, F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

Exercice 18 : [énoncé]

a) On opère à une orthonormalisation de Schmidt de la famille libre $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$: on obtient ainsi une famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec, par construction

$$\forall n\in\mathbb{N}, P_n\in\operatorname{Vect}(1,X,\dots,X^n).$$

La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant libre (car orthonormale), la propriété précédente entraine

$$\forall n\in\mathbb{N}, \deg P_n = n.$$

b) Introduisons $L_1,\dots,L_n$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange en $\omega_1,\dots,\omega_n$ et posons

$$\forall k\in[\![1\,;n]\!], \lambda_k=\int_0^1 L_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par construction, on a

$$\forall k\in[\![1\,;n]\!], E(L_k)=0.$$

L'application E étant linéaire, on obtient $E(P)=0$ pour tout polynôme P combinaison linéaire des L_k. Or la famille des L_k est base de l'espace des polynômes de degrés strictement inférieurs à n et l'on peut conclure !

c) Soit P un polynôme de degré strictement inférieur à $2n$. On opère la division euclidienne de P par P_n pour écrire

$$P=P_nQ+R \text{ avec } \deg R<n.$$

Puisque P est de degré strictement inférieur à $2n$, le polynôme Q est de degré strictement inférieur à n : il peut s'écrire comme combinaison linéaire de polynômes P_m avec $m<n$. On en déduit

$$\int_0^1 P_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t=(P_n\mid Q)=0$$

et donc

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 R(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus

$$\forall k\in[\![1\,;n]\!], P(\omega_k)=R(\omega_k) \text{ car } P_n(\omega_k)=0$$

et donc

$$E(P)=E(R)=0 \text{ car } \deg R<n.$$

d) Les points d'évaluation ω_k sont particulièrement adaptés au calcul numérique d'une intégrale.

Exercice 19 : [énoncé]
Raisonnons par récurrence sur $n\geq 2$.
Pour $n=2$ la propriété est immédiate car aucun vecteur ne peut être nul.
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 2$.
Soit $(x_1,\dots,x_{n+1})$ une famille de vecteurs vérifiant

$$\forall 1\leq i\neq j\leq n+1, (x_i\mid x_j)<0$$

Par projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $D=\operatorname{Vect} x_{n+1}$, on peut écrire pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$

$$x_i=y_i+\lambda_i x_{n+1}$$

avec y_i un vecteur orthogonal à x_{n+1} et $\lambda_i<0$ puisque $(x_i\mid x_{n+1})<0$.
On remarque alors

$$(x_i\mid x_j)=(y_i\mid y_j)+\lambda_i\lambda_j\left\|x_{n+1}\right\|^2$$

et on en déduit

$$\forall 1\leq i\neq j\leq n, (y_i\mid y_j)<0$$

Par hypothèse de récurrence, on peut affirmer que la famille $(y_2,\dots,y_n)$ est libre et puisque ses vecteurs sont orthogonaux au vecteur x_{n+1} non nul, on peut aussi dire que la famille $(y_2,\dots,y_n,x_{n+1})$ est libre. Enfin, on en déduit que la famille $(x_2,\dots,x_n,x_{n+1})$ car cette dernière engendre le même espace que la précédente et est formée du même nombre de vecteurs.
Par permutation des indices, ce qui précède vaut pour toute sous-famille formée de n vecteurs de la famille initiale $(x_1,\dots,x_n,x_{n+1})$.
Récurrence établie.

Exercice 20 : [énoncé]
Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$
Pour $n=1$: Soit u un vecteur unitaire de E. On peut écrire
$x_1=\lambda_1.u, x_2=\lambda_2.u, x_3=\lambda_3.u$
On a alors

$$(x_1\mid x_2)=\lambda_1\lambda_2,(x_2\mid x_3)=\lambda_2\lambda_3,(x_3\mid x_1)=\lambda_3\lambda_1$$

Ces trois quantités ne peuvent être négatives car

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_2\lambda_3\lambda_3\lambda_1=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2\geq 0$$

Supposons la propriété établie au rang $(n-1)\in\mathbb{N}^*$:
Par l'absurde, supposons que la configuration soit possible :
Nécessairement $x_{n+2}\neq 0$.

Posons $F = \text{Vect}(x_{n+2})^{\perp}$. On a $\dim F = n-1$.

$$\forall 1 \leq i \leq n+1, x_i = y_i + \lambda_i.x_{n+2}$$

avec $y_i \in F$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Comme $(x_i \mid x_{n+2}) < 0$ on a $\lambda_i < 0$.

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq n+1, (x_i \mid x_j) = (y_i \mid y_j) + \lambda_i\lambda_j \|x_{n+2}\|^2 < 0$$

donc $(y_i \mid y_j) < 0$.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(y_1, \dots, y_{n+1})$ formée de vecteurs qui évoluent dans F. Récurrence établie.

Exercice 21 : [énoncé]
Cas $n = 1$.
Supposons disposer de vecteurs x_1, x_2, x_3 tels que

$$\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$$

Puisque $x_1 \neq 0$, (x_1) est une base de E.
Cela permet d'écrire $x_2 = \lambda x_1$ et $x_3 = \mu x_1$.
$(x_2 \mid x_1) < 0$ et $(x_3 \mid x_1) < 0$ donne $\lambda < 0$ et $\mu < 0$ mais alors $(x_2 \mid x_3) = \lambda\mu \|x_1\|^2 > 0$!
Cas $n = 2$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1, ..., x_4$ tels que

$$\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$$

x_1 étant non nul on peut écrire

$$\forall i \geq 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$$

avec $y_i \in \{x_1\}^{\perp}$ et $\lambda_i < 0$.
On

$$\forall i \neq j \geq 2, (x_i \mid x_j) = \lambda_i\lambda_j + (y_i \mid y_j) < 0$$

donc $(y_i \mid y_j) < 0$.
y_2, y_3, y_4 se positionnant sur la droite $\{x_1\}^{\perp}$, l'étude du cas $n = 1$ permet de conclure.
Cas général.
Par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$: ci-dessus
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.
Supposons disposer de vecteurs $x_1, ..., x_{n+3}$ tels que

$$\forall i \neq j, (x_i \mid x_j) < 0$$

à l'intérieur d'un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$.
x_1 étant non nul on peut écrire

$$\forall i \geq 2, x_i = \lambda_i x_1 + y_i$$

avec $y_i \in \{x_1\}^{\perp}$ et $\lambda_i < 0$.
On a

$$\forall i \neq j \geq 2, (x_i \mid x_j) = \lambda_i\lambda_j + (y_i \mid y_j) < 0$$

donc $(y_i \mid y_j) < 0$.
$y_2, ..., y_{n+3}$ se positionnant sur le sous-espace vectoriel $\{x_1\}^{\perp}$ qui est de dimension n, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.
Récurrence établie.

Exercice 22 : [énoncé]

a) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta}$.
Si $\alpha = -1$ alors $a \in \ker f_\alpha$ et donc f_α n'est pas bijective.
Si $\alpha \neq -1$ alors, pour $\beta = -\frac{\alpha}{1+\alpha}$,
$$f_\beta \circ f_\alpha = f_\alpha \circ f_\beta = f_0 = \text{Id}$$
d'où la bijectivité de f_α.

b) Tout vecteur non nul orthogonal à a est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
Tout vecteur non nul colinéaire à a est vecteur propre associé à la valeur propre $1 + \alpha$.
Pour une raison de dimension, il ne peut y avoir d'autres vecteurs propres.

Exercice 23 : [énoncé]

a) L'application f est linéaire et l'espace E est de dimension finie. Il suffit d'étudier l'injectivité de f pour pouvoir conclure.
Si $x \in \ker f$ alors $x = (a \mid x)\, b$ et donc $(a \mid x) = (a \mid x)\,(a \mid b)$.
Si $(a \mid x) \neq 0$ alors $(a \mid b) = 1$ et donc $a = b$ (par égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
Par contraposée si $a \neq b$ alors $(a \mid x) = 0$ et $x = 0$ donc f bijective.
En revanche si $a = b$ alors $a \in \ker f$ et f n'est pas bijective.

b) Supposons $a \neq b$. Si $y = f(x)$ alors $y = x - (a \mid x)\, b$ puis $(a \mid y) = (a \mid x)\,(1 - (a \mid b))$ et donc

$$x = y + \frac{(a \mid y)}{1 - (a \mid b)} b$$

c)

$$f(x) = \lambda x \iff (a \mid x)\, b = (1 - \lambda)x$$

Soit λ une valeur propre. Il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$ donc $(a \mid x)\, b = (1 - \lambda)x$ puis $(a \mid x)\,(a \mid b) = (1 - \lambda)\,(a \mid x)$ ce qui donne $(a \mid x) = 0$ (qui implique $\lambda = 1$ avec $E_\lambda(f) = \{a\}^\perp$) ou $\lambda = 1 - (a \mid b)$.
Si $(a \mid b) = 0$: $\lambda = 1$ est seule valeur propre et l'espace propre associé est l'hyperplan de vecteur normal a.
L'endomorphisme n'est alors pas diagonalisable.
Si $(a \mid b) \neq 0$: $\lambda = 1$ et $\lambda = 1 - (a \mid b)$ sont valeurs propres et puisque $E_1(f)$ est un hyperplan, l'endomorphisme est diagonalisable.

Exercice 24 : [énoncé]
Si p est une projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F alors

$$\forall x \in E, x = p(x) + (x - p(x))$$

avec $p(x) \perp (x - p(x))$. Par le théorème de Pythagore

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

Inversement, soit p une projection telle que

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Puisque p est une projection, les espaces $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \ker p$ sont supplémentaires et p est la projection sur F parallèlement à G. Il s'agit alors de montrer que ces deux espaces sont orthogonaux.
Soient $u \in F, v \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons le vecteur

$$x = u + \lambda . v$$

On a $p(x) = u$ et $\|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ ce qui donne

$$0 \leq 2\lambda\,(u \mid v) + \lambda^2 \|v\|^2$$

Ceci valant pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $(u \mid v) = 0$.
En effet, si $(u \mid v) \neq 0$ alors

$$2\lambda\,(u \mid v) + \lambda^2 \|v\|^2 \underset{\lambda \to 0}{\sim} 2\lambda\,(u \mid v)$$

ce qui est une expression qui change de signe.
Ainsi les espaces F et G sont orthogonaux et p est donc une projection orthogonale.

Exercice 25 : [énoncé]
Le projecteur p projette sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$. Il est orthogonal si, et seulement si, $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux. Soient $x \in \ker p$ et $y \in \operatorname{Im} p$. On a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle p(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle \geq 0$$

ce qui donne

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq 0$$

puis

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq 0$$

Si par l'absurde $\langle y, x \rangle \neq 0$ alors

$$\lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \underset{\lambda \to 0}{\sim} \lambda \langle y, x \rangle$$

qui n'est pas de signe constant. C'est absurde.

Exercice 26 : [énoncé]
On sait

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (x_k \mid x)\, x_k$$

donc

$$p_F(e_i) = \sum_{k=1}^{p} ({}^t X_k E_i) x_k$$

en notant $E_i = \operatorname{Mat}_e(e_i)$.
Puisque ${}^t X_k E_i$ est un réel,

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F(e_i)) = \sum_{k=1}^{p} ({}^t X_k E_i) X_k = \sum_{k=1}^{p} X_k {}^t X_k E_i$$

puis

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{k=1}^{p} X_k {}^t X_k$$

car, par blocs, $\begin{pmatrix} E_1 & \cdots & E_n \end{pmatrix} = I_n$.

Exercice 27 : [énoncé]

a) Vérification sans peine.

b) Soit $(f, g) \in V \times W$. On a

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g''(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)g'(t)\right]_0^1 = 0$$

et les espaces V et W sont donc en somme directe.
Soit $f \in E$. Posons

$$\lambda = f(0) \text{ et } \mu = \frac{f(1) - f(0)\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}$$

On a $f = g + h$ avec $h = \lambda\,\mathrm{ch} + \mu\,\mathrm{sh} \in W$ et $g = f - h \in V$ par construction.
Les espaces V et W sont donc supplémentaires orthogonaux et l'on peut introduire la projection orthogonale p sur W. Par ce qui précède

$$p(f) = f(0)\,\mathrm{ch} + \frac{f(1) - f(0)\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{sh}$$

c) Soit g la fonction de $E_{\alpha,\beta}$ définie par

$$g = \alpha\,\mathrm{ch} + \frac{\beta - \alpha\,\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)}\,\mathrm{sh}$$

Les fonctions de $E_{\alpha,\beta}$ sont alors de la forme $f = g + h$ avec h parcourant V et par orthogonalité de g et h

$$\int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t = \|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$$

On en déduit

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2\right)\mathrm{d}t = \|g\|^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)\,\mathrm{ch}(1) - 2\alpha\beta}{\mathrm{sh}(1)}$$

Exercice 28 : [énoncé]

a) symétrie, bilinéarité et positivité : ok
Si $\varphi(P, P) = 0$ alors $\int_0^{+\infty} P^2(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$ donc (fonction continue positive d'intégrale nulle)

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, P(t) = 0$$

Comme le polynôme P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

b) Par intégration par parties successives, $\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$ donc

$$\varphi(X^p, X^q) = (p + q)!$$

c) On interprète

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t = d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \left\|X^2 - \pi\right\|^2$$

avec $\pi = aX + b$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$
$\left(X^2 - \pi \mid 1\right) = \left(X^2 - \pi \mid X\right) = 0$ donne

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

Après résolution $a = 4$, $b = -2$ et

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^2 - (at + b))^2\,\mathrm{d}t = 4$$

Exercice 29 : [énoncé]
En introduisant l'espace E des fonctions réelles f continues sur $]0\,;1]$ telles que $t \mapsto (tf(t))^2$ soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

la quantité cherchée est : $m = d(f, F)^2$ avec $f \colon t \mapsto \ln t$ et $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$ où $f_0(t) = 1$ et $f_1(t) = t$.
$m = \|f - p(f)\|^2$ avec p la projection orthogonale sur F.
$p(f)(t) = a + bt$ avec $(p(f) \mid f_0) = (f \mid f_0)$ et $(p(f) \mid f_1) = (f \mid f_1)$.
La résolution du système ainsi obtenu donne $a = 5/3$ et $b = -19/12$.
$m = \|f - p(f)\|^2 = (f - p(f) \mid f) = 1/432$.

Exercice 30 : [énoncé]
On sait déjà
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (e_n \mid x)^2 \leq \|x\|^2$$
en vertu de l'inégalité de Bessel.
Par totalité de la famille, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in \mathrm{Vect}(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$.
Le vecteur y est une combinaison linéaire de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \in \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_N)$ et donc
$$\varepsilon \geq \|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$$
avec $p(x)$ le projeté de x sur $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_N)$ c'est-à-dire
$$p(x) = \sum_{n=0}^{N} (e_n \mid x)\, e_n$$
Par suite $|\|x\| - \|p(x)\|| \leq \|x - p(x)\| \leq \varepsilon$ donne
$$\|x\| \leq \|p(x)\| + \varepsilon = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} (e_n \mid x)^2} + \varepsilon \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (e_n \mid x)^2} + \varepsilon$$
Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\|x\| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (e_n \mid x)^2}$ et finalement
$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (e_n \mid x)^2$$

Exercice 31 : [énoncé]
On sait $\ker A \subset \ker({}^tAA)$ et si $X \in \ker({}^tAA)$ alors ${}^tAAX = 0$ donc
$$\|AX\|^2 = {}^tX{}^tAAX = 0$$
puis $X \in \ker A$. Ainsi
$$\ker A = \ker({}^tAA)$$
Il en découle
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tAA)$$
puis
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}({}^{tt}A{}^tA) = \mathrm{rg}(A{}^tA)$$
Or $\mathrm{Im}(A{}^tA) \subset \mathrm{Im}\, A$ donc
$$\mathrm{Im}(A{}^tA) = \mathrm{Im}\, A$$

Exercice 32 : [énoncé]

a) Evidemment
$$\ker({}^tA + A) \supset \ker(A) \cap \ker({}^tA)$$
Inversement, soit $X \in \ker({}^tA + A)$. On a
$${}^tAX + AX = 0$$
et donc
$$A{}^tAX + A^2X = A{}^tAX = 0$$
puis
$${}^tXA{}^tAX = \left\|{}^tAX\right\|^2 = 0$$
On en déduit ${}^tAX = 0$ puis aussi $AX = 0$.
On peut alors conclure l'égalité demandée.

b) ($\Longrightarrow$) Supposons ${}^tA + A$ inversible. On a alors
$$\ker({}^tA + A) = \ker(A) \cap \ker({}^tA) = \{0\}$$
On en déduit
$$\dim \ker A + \dim \ker {}^tA \leq n$$
Or
$$\dim \ker {}^tA + \mathrm{rg}\, {}^tA = n$$
donc
$$\dim \ker A \leq \mathrm{rg}\, {}^tA = \mathrm{rg}\, A$$
Mais $A^2 = 0$ entraîne $\mathrm{Im}\, A \subset \ker A$ puis $\mathrm{rg}\, A \leq \dim \ker A$.
Finalement, $\mathrm{Im}\, A \subset \ker A$ et $\mathrm{rg}\, A = \dim \ker A$ donc $\mathrm{Im}\, A = \ker A$.
($\Longleftarrow$) Supposons $\mathrm{Im}\, A = \ker A$. Soit $X \in \ker({}^tA + A) = \ker(A) \cap \ker({}^tA)$.
On a $X \in \ker A$ donc $X \in \mathrm{Im}\, A$. Il existe alors une colonne Y telle que $X = AY$. Mais on a aussi ${}^tAX = 0$ donc ${}^tAAY = 0$ puis
$$\|X\|^2 = \|AY\|^2 = {}^tY{}^tAAY = 0$$
Ainsi $\ker({}^tA + A) = \{0\}$ et la matrice ${}^tA + A$ s'avère inversible.

Exercice 33 : [énoncé]
On a
$$\left\|{}^tAX\right\|^2 = {}^tXA{}^tAX = \left\langle X, A{}^tAX \right\rangle$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|{}^tAX\right\|^2 = \left\langle X, A^tAX\right\rangle \leq \|X\| \left\|A^tAX\right\| \leq \|X\| \left\|{}^tAX\right\|$$

Ainsi

$$\left\|{}^tAX\right\| \leq \|X\|$$

et ce que ${}^tAX = 0$ ou non.

Exercice 34 : [énoncé]

a) On a

$$\left\|{}^tAX\right\|^2 = {}^tXA^tAX = \left\langle X, A^tAX\right\rangle$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left\|{}^tAX\right\|^2 = \left\langle X, A^tAX\right\rangle \leq \|X\| \left\|A^tAX\right\| \leq \|X\| \left\|{}^tAX\right\|$$

Ainsi

$$\left\|{}^tAX\right\| \leq \|X\|$$

et ce que ${}^tAX = 0$ ou non.

b) Si $AX = X$ alors

$$\left\|{}^tAX - X\right\|^2 = \left\|{}^tAX\right\|^2 - 2\left\langle {}^tAX, X\right\rangle + \|X\|^2 \leq 2\left(\|X\|^2 - {}^tXAX\right) = 0$$

On en déduit ${}^tAX = X$.

c) Soit $X \in \ker(A - I_n) \cap \operatorname{Im}(A - I_n)$.
On a $AX = X$ (et donc ${}^tAX = X$) et il existe $Y \in E$ vérifiant $X = AY - Y$.

$$\|X\|^2 = \langle X, AY - Y\rangle = {}^tXAY - {}^tXY$$

Or

$${}^tXAY = {}^t\left({}^tAX\right)Y = {}^tXY$$

et donc $\|X\|^2 = 0$. Ainsi

$$\ker(A - I_n) \cap \operatorname{Im}(A - I_n) = \{0\}$$

Enfin, le théorème du rang

$$\dim\ker(A - I_n) + \operatorname{rg}(A - I_n) = \dim E$$

permet de conclure

$$E = \ker(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n)$$

Exercice 35 : [énoncé]
Si $X \in \ker A$ alors $X \in \ker {}^tAA$.
Inversement, si $X \in \ker {}^tAA$ alors ${}^tAAX = 0$ donc ${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = 0$ d'où $AX = 0$ puis $X \in \ker A$.
Ainsi

$$\ker({}^tAA) = \ker A$$

puis par la formule du rang

$$\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg} A$$