Suites
Résumé

Suites bornées

Déf

Soit $(U_n)_n$ une suite réelle.

1/ $(U_n)_n$ est majorée $\Longleftrightarrow \left\{ \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \leq M \right\}$

2/ (U_n) est minorée $\Longleftrightarrow \left\{ \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \geq m \right\}$

3/ (U_n) est bornée $\Longleftrightarrow$ { (U_n) à la fois majorée et minorée }

Prop :

(U_n) bornée $\Longleftrightarrow \left(\exists c \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |U_n| \leq c \right)$

Monotonie d'une Suite

$(U_n)_{n \geq n_0}$ sera une suite réelle.

Déf 1 :

1- $(U_n)_{n\geq n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0, U_n \leq U_{n+1})$

2- $(U_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0, U_n \geq U_{n+1})$

3- $(U_n)_{n\geq n_0}$ est strict croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0 ; U_n < U_{n+1})$

4- $(U_n)_{n\geq n_0}$ est strict $\searrow$ $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0 ; U_n > U_{n+1})$

5- $(U_n)_{n\geq n_0}$ est dite constante $\Leftrightarrow$ $(\forall n \geq n_0 ; U_n = U_{n+1})$

NB 1 : Supp que $\boxed{\forall n \geq n_0, U_n > 0}$, on a :

$$(U_n)_{n\geq n_0} \begin{cases} 1- \nearrow \Leftrightarrow \left(\forall n \geq n_0, \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1\right) \\ 2- \searrow \Leftrightarrow \left(\forall n \geq n_0, U_{n+1}/U_n \leq 1\right) \\ 3- \text{Strict} \nearrow \Leftrightarrow \left(\forall n \geq n_0, U_{n+1}/U_n > 1\right) \\ 4- \text{strict} \searrow \Leftrightarrow \left(\forall n \geq n_0, U_{n+1}/U_n < 1\right) \\ 5- \text{Constante} \Leftrightarrow \left(\forall n \geq n_0, U_{n+1}/U_n = 1\right) \end{cases}$$

NB 2 :

1- $(U_n)_{n\geq n_0}$ Croissante $\Leftrightarrow$ $(\forall p, q \geq n_0 \; p < q \Rightarrow U_p \leq U_q)$

2- $(U_n)_{n\geq n_0}$ Strict $\nearrow$ $\Leftrightarrow$ $(\forall p, q \geq n_0 \; p < q \Rightarrow U_p < U_q)$

3- De même pour $\searrow$ et strict $\searrow$

NB$_3$:

1- Si $(U_n)_{n\geq n_0} \nearrow$ alors $[\forall n\geq n_0, U_n \geq U_{n_0}]$

2- Si $(U_n)_{n\geq n_0} \searrow$ alors $[\forall n\geq n_0\ U_n \leq U_{n_0}]$

Notation :

* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: l'ensemble des suites réelles
* $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: l'ensemble des suites Complexes

Déf :

1- $(U_n)_n$ est dite monotone quand elle est croissante ou décroissante

2- Idem pour strictement monotone

Rq : $(U_n)_{n\geq n_0}$ constante $\Longleftrightarrow (\exists c\in\mathbb{R}, \forall n\geq n_0 ; U_n = c)$

Caractérisations d'une suite arith et géom

Prop : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite arithmétique si et ssi

$$\forall n\in\mathbb{N}, \ U_{n+1} = \frac{U_n + U_{n+2}}{2}$$

Prop : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géometrique $\Leftrightarrow [\forall n\in\mathbb{N}, \ U_{n+1}^2 = U_n U_{n+2}]$

Déf : (Suite stationnaire)

(U_n) suite est dite stationnaire si et si elle est constante à partir d'un rang.

Autrement dit : $(U_n)_{n\geq n_0}$ stationnaire $\Longleftrightarrow$

$[\exists C\in\mathbb{R},\ \exists p\in\mathbb{N},\ \forall n\geq p,\ U_n=C]$

Suite extraite (ou sous-suite)

Déf : (suite extraite d'une suite)

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (c.à.d suite réelle).

On appelle suite extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(U_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$; où

$\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ une application strictement croissante

Limite infinie d'une suite

Déf ($\lim U_n=+\infty$)

Soit $(U_n)_n\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\left(\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty\right)\Longleftrightarrow\left(\forall A>0;\ \exists N\in\mathbb{N};\ \forall n\geq N;\ U_n\geq A\right)$$

Déf 2 : $\left(\lim u_n = -\infty\right)$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty\right) \Leftrightarrow \left(\forall A < 0 ; \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N , u_n \leq A\right)$$

Limite finie d'une suite réelle

Déf 1 : $\left(\lim u_n = \ell \ , \ \ell \in \mathbb{R}\right)$

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On dit que $(u_n)_n$ possède ℓ comme limite si et ssi

$$\left(\forall \varepsilon > 0 , \exists N \in \mathbb{N} , \forall n \geq N , |u_n - \ell| \leq \varepsilon\right)$$

Unicité de la limite

1- Si $(u_n)_n$ possède une limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors celle-ci est unique.

2- ℓ s'appelle la limite de $(u_n)_n$ et se note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim\limits_{n} u_n$.

Prop : Limite d'une suite extraite

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ (c.à.d ℓ fini ou infini)

Si $\lim\limits_{n} u_n = \ell$ alors pour toute sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ on a :

$$\lim_{n} u_{\varphi(n)} = \ell$$

Vocabulaire :

1) Si (u_n) possède une limite finie. On dit que (u_n) est une suite convergente

2 Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

NB : Une suite (u_n) divergente comporte deux Situations :

→ $\lim_n u_n = +\infty$

→ (u_n) n'admet pas de limite.

Corrollaire : Pour mq une suite diverge, il suffit d'exhiber deux suites extraites qui ont 2 limites différentes.

Corrollaire : S'il existe une suite extraite de limite infinie alors (u_n) diverge.

Prop : Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Si $\begin{cases} \lim u_{2n} = \ell \\ \lim u_{2n+1} = \ell \end{cases}$ alors $\lim_n u_n = \ell$

Bornitude d'une suite convergente

Prop : Toute suite convergente est bornée.

Propriétés sur les limites des suites

Prop Soit $\ell \in \mathbb{R}$
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1/ $\lim\limits_{n} U_n = \ell$

2/ $\lim\limits_{n} (U_n - \ell) = 0$

3/ $\lim\limits_{n} |U_n - \ell| = 0$

Corol $\lim\limits_{n} U_n = 0 \Leftrightarrow \lim |U_n| = 0$

Prop - Soit $\ell \in \mathbb{R}$
Si $\lim\limits_{n} U_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n} |U_n| = |\ell|$

Ordre et limite

Prop 1 Soient (U_n) et (V_n) deux suites convergentes.

1/- $(\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n) \Rightarrow \lim U_n \leq \lim V_n$

2/- $(\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n < V_n) \Rightarrow \lim U_n \leq \lim V_n$

$$\boxed{\text{Rque : } (\forall n, \; U_n < V_n) \not\Rightarrow \lim U_n < \lim V_n}$$

NB : (Prop 1) reste valable si on supp que
[$U_n \leq V_n$ à partir d'un rang]
Càd $(\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, \; U_n \leq V_n)$

Prop Si ($\lim_n u_n = \ell > 0$) Alors la suite $(u_n)_n$ est strictement positive à partir d'un certain rang

Prop :

Si $\lim_n u_n = \ell > 0$ alors $(u_n)_n$ est minorée par un réel strictement positive à partir d'un rang.

Prop Si $\lim_n u_n = \ell < 0$ alors la suite $(u_n)_n$ est strictement négatif à partir d'un certain rang.

Prop : ($\lim u_n = \ell < 0$) $\Rightarrow (u_n)_n$ est majorée par un réel strict < 0 à partir d'un certain rang.

Corrolaire : Si ($\lim_n u_n = \ell \neq 0$), alors la suite $(u_n)_n$ ne s'annule pas à partir d'un rang.

Prop 5 : Supp que : ($\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq v_n$)

1) $\lim_n u_n = +\infty \Rightarrow \lim_n v_n = +\infty$

2) $\lim_n v_n = -\infty \Rightarrow \lim u_n = -\infty$

NB : la prop est valable si on suppose que $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang

Càd : $(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n)$

Prop 61 : Soit $\ell \in \mathbb{R}$

Supp que $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & |u_n - \ell| \leq \alpha_n \\ \text{et} & \\ \lim \alpha_n = 0 & \end{cases}$

Alors $\boxed{\lim_n u_n = \ell}$

Corrollaire :

Si $\begin{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \alpha_n \\ \lim_n \alpha_n = 0 \end{pmatrix}$ alors $\left(\lim_n u_n = 0\right)$

Corrollaire : Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle est une suite de limite nulle.

Autrement dit :

Si $\begin{pmatrix} (b_n) \text{ bornée} \\ \lim_n \alpha_n = 0 \end{pmatrix}$ alors $\left(\lim_n b_n \alpha_n = 0\right)$

Prop : Théoreme des gendarmes :

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ (ℓ fini).

Si $\begin{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \leq u_n \leq \beta_n \\ \lim_n \alpha_n = \ell \text{ et } \lim_n \beta_n = \ell \end{pmatrix}$ Alors $\lim_n u_n = \ell$

NB : Dans "gendarmes", la Limite doit être finie.

Operations sur les limites des suites

Somme

Prop 1 : $\lim(U_n+V_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$\lim V_n$ \ $\lim U_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I
$-\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$

Prop . Soient α et ℓ deux réels :

$\lim_n U_n=\ell \Rightarrow \lim \alpha U_n=\alpha\ell$

Corrol Si $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont deux suites Convergentes alors il en est de même pour la combinaison Linéaire $(\alpha U_n+\beta V_n)_n$ et on a :

$$\lim_n(\alpha U_n+\beta V_n)=\alpha\lim(U_n)+\beta\lim(V_n)$$

Produit

Prop

$\lim V_n$ \ $\lim U_n$	$L\in\mathbb{R}^*$	0	$\pm\infty$
$\ell\in\mathbb{R}^*$	ℓL	0	$+\infty$ $-\infty$ selon les signes
0	0	0	F I
$\pm\infty$	$\pm\infty$ selon les signes	F I	$\pm\infty$ selon les signes

Corrol 2 : Le produit de deux suites convergentes est une suite convergente et on a :

$$\lim_n (u_n v_n) = (\lim_n u_n) \times (\lim_n v_n)$$

Inverse et Produit

Prop Si $\lim_n u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$ Alors $\lim_n \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$

Corrollaire Toute suite monotone possède une Limite (finie ou infinie).

Suites adjacentes :

Déf : Deux suites sont dites adjacentes si et ssi :

1) L'une est croissante.
2) L'autre est décroissante.
3) Leur différence tend vers 0.

Prop Si deux suites sont adjacentes, alors elles convergentes et convergent vers la même limite.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Prop : Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.

Caractérisation séquentielle de la densité :

Prop (Caract séquent de la densité)
Soit $A \subset \mathbb{R}$, Les propositions suivantes sont équivalentes :
1/ A est dense dans $\mathbb{R}$.
2/ $\forall x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (u_n) à valeurs ds A tq $\lim_n u_n = x$

Prop : Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Il existe $(u_n)_n \subset A$ tque $\lim_n u_n = \sup A$

NB : En Spé, on dira que $\sup(A)$ est ainsi un point adhérant à A.

Prop3 : Soit A une partie non vide et non majorée de $\mathbb{R}$
Il existe une suite $(u_n)_n \subset A$ tq $\lim_n u_n = +\infty$.

Brève extension aux suites complexes.

Soit $(u_n)_n$ une suite Complexe; Càd $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{C})$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = Re(u_n) + i\, Im(u_n)$$

Notation et Vocabulaire :
1/ $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
2/ $(Re(u_n))_n$ et $(Im(u_n))_n$ sont les parties réelles et imaginaires de la suite complexe (u_n).

NB : $(Re(u_n))_n$ et $(Im(u_n))_n$ sont deux suite réelles.

Bornitude :

Ici $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Déf : (u_n) est dite bornée si et ssi :

$$\left(\exists c \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq c\right)$$

module

Attention : On est dans $\mathbb{C}$, alors on ne parle pas de "majorée" et "minorée".

Prop Soit (u_n) une suite complexe ; (u_n) est bornée si et ssi $(R_e(u_n))_n$ et $(I_m(u_n))_n$ sont bornées.

Limite d'une suite complexe :

Déf Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$.
On dit que $(u_n)_n$ possède l comme limite si et ssi la suite réelle $(|u_n - l|)_n$ tend vers 0.

NB Si la limite existe elle est unique et on écrit $\lim_n u_n = l$.

NB Les propositions suivantes sont équivalentes

1/ $\lim_n u_n = l$

2/ $|u_n - l| \xrightarrow[n]{} 0$

3/ $(\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon)$

Prop $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$.
Les propositions svts sont équivalentes.

1/ $\lim_n u_n = l$

2/ $\begin{cases} \lim R_e(u_n) = R_e(l) \\ \lim I_m(u_n) = I_m(l) \end{cases}$

NB : Les propriétés algébriques sur les suites réelles valent aussi pour les suites complexes.

Par exemple :

1/ $\lim_n u_n = \ell \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim |u_n| = |\ell|$

2/ $\begin{cases} \lim_n u_n = \ell \\ \lim_n w_n = L \end{cases} \Rightarrow \lim_n (\alpha u_n + \beta w_n) = \alpha \ell + \beta L$

3/ $\begin{cases} \lim_n u_n = \ell \\ \lim_n w_n = L \end{cases} \Rightarrow \lim u_n w_n = \ell L$

4/ $\begin{cases} \lim_n u_n = \ell \in \mathbb{C}^* \\ \lim_n w_n = L \end{cases} \Rightarrow \lim_n \frac{w_n}{u_n} = \frac{L}{\ell}$

5/ Si $\begin{cases} \forall n,\ |u_n - \ell| \leq \alpha \\ \text{et } \lim \alpha_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_n u_n = \ell$

6/ $\left(\begin{array}{l} \lim \alpha_n = 0 \\ \text{et} \\ (\beta_n) \text{ bornée} \end{array} \right) \Rightarrow \lim_n \alpha_n \beta_n = 0$

Prop

Une sous-suite de la sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est de la forme $(u_{\varphi(\phi(n))})_n$

Théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites complexes

Prop : Théorème de B-Weierstrass

Toute suite complexe bornée possède une sous-suite convergente.

Suites arithmético - géométriques

On appelle suite arithmético - géométrique toute suite (u_n) vérifiant : $(\forall n \in \mathbb{N} ; \ u_{n+1} = a u_n + b)$ où a et b sont deux constantes, avec $a \neq 1$

NB : si $a = 1$, on aurait une suite arithmetique.

Prop : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmetico-géometrique verifiant $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b)$ Soit ℓ virifiant $\ell = a\ell + b$ la suite $(u_n - \ell)_n$ est géométrique de raison a.

Conséquence importante :

On peut ainsi déterminer le terme général d'une suit arithmético-géo (en fonction de n)

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Déf : C'est toute suite $(u_n)_n$ vérifiant : $(\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n)$ où a et b sont des constantes.

Déf 2 : (Equat° Caractéristique)

L'éqt° caractéristique de la suite récurrente ci-dessus est $(r^2 = ar + b)$

Prop (Terme général)

$(u_n)_{n\geq 0}$ suite récurrente vérifiant :

$(\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+2} = a u_n + b u_n)$ et d'équat° caractéristique

$(E_c) : r^2 = ar + b$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et Δ son discriminant.

1) Cas 1 : Si $\Delta > 0$

Soient r_1 et r_2 les deux solutions de (E_c)

Le terme général est de la forme :

$\boxed{u_n = A r_1^n + B r_2^n}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.

2) Cas 2 si $\Delta = 0$

Soit r_1 l'unique solution de (E_c).

Le terme général est de la forme

$$\boxed{u_n = A r_1^n + B n r_1^n = (A + Bn) r_1^n}$$

3) Cas 3 : si $\Delta < 0$

r_1 et $\overline{r_1}$ les deux solutions complexes conjuguées de (E_c).

Notons $r_1 = \rho e^{i\theta}$ Le terme général est de la forme : $u_n = A \cdot \rho^n \cos(n\theta) + B \cdot \rho^n \sin(n\theta)$

Fin