Probabilités (Partie 4)
Résumé

Dans toute cette partie, (Ω, T, P) est un espace probabilisé.

Cette partie constitue la suite des Partie 1, Partie 2 et Partie 3

I) Lois continues (ou à densité)

1) Généralités

Déf 1

Soit X une variable aléatoire réelle (var), de fonction de répartition F.

X est dite à loi continue si et ssi :

1) F est continue sur $\mathbb{R}$.

2) F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf en un nombre fini de points, éventuellement vide.

Abréviation X varc.

Prop 2

Si X est une varc, alors toutes les expressions suivantes sont égales :

1) $P(a \leqslant X \leqslant b)$

2) $P(a \leqslant X < b)$

3) $P(a < X \leqslant b)$

4) $P(a < X < b)$

5) $F(b) - F(a)$

où $a < b$ deux réels.

Déf 3 (Densité)

Soit X une varc.

Notons H l'ensemble des points où F est de classe C^1.

On appelle densité de X la fonction f_X définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} F'(x) & \text{si } x \in H \\ 0 & \text{si } x \notin H \end{cases}}$$

NB : On note aussi f s'il n'y a pas risque de confusion.

Prop 4

Soit X une varc de densité f et de fonction répartition F. On a :

1) $f \geq 0$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = P(a \leq X \leq b)$

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

à retenir

Pour montrer qu'une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est une densité de probabilités, on vérifie les 3 points suivants :

1) $f \geq 0$

2) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points (éventuellement vide)

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

2) Lois Continues usuelles

a) Loi Uniforme sur le segment $[a,b]$

Densité : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notation : $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a,b])$

b) Loi exponentielle de paramètre λ (où $\lambda > 0$)

Densité : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notation : $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$

c) Loi normale de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$

Densité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

Notation : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$

Cas particulier

Loi normale Centrée réduite

Densité : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Notation : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

d) Loi gamma de paramètres (α, β), où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

Densité : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Notation : $X \rightsquigarrow \Gamma(\alpha, \beta)$

II) Espérance

1) Définition

Déf

Soit X une varc de densité f.

1) On dit que X possède une espérance si et ssi la fonction $t \longmapsto t f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Dans ce cas, l'espérance de X est :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$$

2) Espérances des lois continues usuelles

Prop 1 (Loi uniforme)

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a,b])$.

X possède une espérance et on a :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Prop 2 (Loi exponentielle)

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.

X possède une espérance et on a :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Prop 3 (Loi normale)

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$, où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

X possède une espérance et on a :

$$\boxed{E(X) = m}$$

Corollaire 4 (Loi normale centrée réduite)

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

X possède une espérance et on a :

$$E(X) = 0$$

Prop 5 (Loi gamma)

Soit $X \rightsquigarrow \Gamma(\alpha, \beta)$, où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

X possède une espérance et on a :

$$\boxed{E(X) = \frac{\alpha}{\beta}}$$

---

3) Formule de transfert

Prop

Soit X une varc de densité f.

Soit $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1) $g(X)$ possède une espérance si et ssi la fonction $t \longmapsto g(t) f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Dans ce cas, on a :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t)\, dt$$

III) Moments et variances

Soit X une varc.

☆ Les définitions suivantes sont calquées sur celles d'une vard:

⟶ Le moment d'ordre k de X.

⟶ La variance de X.

⟶ L'écart-type...

☆ Leurs propriétés chez une vard sont préservées chez une varc.

Espérances et variances des lois continues usuelles

Loi de X	E(X)	V(X)
$X \rightsquigarrow \mathcal{U}([a,b])$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
$X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m,\sigma)$	m	σ^2
$X \rightsquigarrow \Gamma(\alpha,\beta)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$

IV) Loi de la somme de deux var indépendantes

Prop 1 (Cas de 2 var : l'une discrète et l'autre Continue)

Soient X_1 et X_2 deux var indépendantes telles que :

X_1 vard et $X_1(\Omega) = D_1$.

X_2 varc de densité f_2.

1) $S = X_1 + X_2$ est une varc.

2) Sa densité f_S est la fonction :

$$f_S(x) = \sum_{d \in D_1} P(X_1 = d)\, f_2(x-d)$$

Prop 2 (Cas de 2 varc)

Soient X_1 et X_2 deux varc, indépendantes et de densités respectives f_1 et f_2.

1) $S = X_1 + X_2$ est une varc.

2) Sa densité f_S est la fonction :

$$f_S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, f_2(x-t)\, dt$$

« f_S est le produit de Convolution de f_1 et f_2 »

FIN