

## Déterminant

### Exercice 1

En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que les déterminants suivants sont nuls :

$$1) \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

$$2) \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{vmatrix}; \text{ où } j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

$$3) \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix}$$

### Exercice 2

En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, calculer les déterminants suivants, et donner-les sous la forme la plus factorisée possible :

$$1) \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$$

$$2) \Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$3) \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \sin(a) & \cos(a) \\ 1 & \sin(b) & \cos(b) \\ 1 & \sin(c) & \cos(c) \end{vmatrix}$$

$$4) \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

### Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer  $\det(A_x)$  et déterminer les valeurs de  $x$  pour lesquelles la matrice  $A_x$  est inversible.

*Vous pouvez utiliser des opérations élémentaires sur les lignes.*

$$1) A_x = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

$$3) A_x = \begin{pmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$4) A_x = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

$$5) A_x = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 & 4 \\ 2 & x & 4 & 3 \\ 3 & 4 & x & 2 \\ 4 & 3 & 2 & x \end{pmatrix}$$

**Exercice 4**

Soit  $n$  un entier naturel impair.

- Déterminer les matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A^2 = -I_n$ .
- Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice anti-symétrique (c-à-d vérifiant  ${}^t A = -A$ ).  
Montrer que  $A$  n'est pas inversible.

**Exercice 5**

- Notons  $F = (P_1, P_2, P_3)$  où 
$$\begin{cases} P_1 = 2 + 3X - X^2 \\ P_2 = 1 + X + X^2 \\ P_3 = a - X + aX^2 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles la famille  $F$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

- Considérons l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + ay + 6z, 7x + 8y + 9z)$$

Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 6**

Considérons la fonction  $f$  définie par le déterminant d'ordre  $n \geq 2$  suivant

$$\forall x \in \mathbb{C}, f(x) = \begin{vmatrix} a+x & c+x & \dots & c+x \\ b+x & a+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \dots & b+x & a+x \end{vmatrix}$$

Montrer que  $f$  est une fonction polynomiale de degré  $\leq 1$ .

Indice : Vous pouvez effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes (ou lignes), puis développer le déterminant suivant l'une de ses lignes (ou colonnes).

**Exercice 7** (*Déterminant de Vandermonde*)(1735-1796 Paris)

Soit  $n \geq 2$ . Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ . On note :

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On se propose de montrer que  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

(*Résultat à retenir!*).

On raisonne par récurrence sur  $n \geq 2$ .

A) Initialisation :

Vérifier que la propriété est vraie pour  $n = 2$ .

B) Hérédité : Soit maintenant  $n \geq 3$ . Supposons que la propriété est vraie pour  $(n - 1)$ , et montrons qu'elle est vraie pour  $n$ .

Soient alors  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ .

1) Méthode 1 :

a) Par des opérations élémentaires sur les lignes, montrer que

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \right) V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

b) Conclure.

2) Méthode 2 : Notons  $P(X) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & \dots & x_{n-1} & X \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & X^{n-1} \end{vmatrix}$

a) Vérifier que l'égalité voulue est vraie si  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ne sont pas distincts deux à deux.

b) Supposons maintenant qu'ils sont distincts deux à deux.

i) Justifier que  $P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ .

Quel est son coefficient en  $X^{n-1}$  ?

ii) Préciser des racines évidentes de  $P(X)$ .

iii) Justifier la relation

$$P(X) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})(X - x_1)(X - x_2)\dots(X - x_{n-1})$$

iv) Conclure.