Par A.CHABCHI

Exercice :

1. Pour $x, y \in [0,1]$, on sait que $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$, donc $\boxed{2\sqrt{xy} \leq x+y}$.

   Par ailleurs $(1-x)(1-y) \leq \left(1-\sqrt{xy}\right)^2 \Longleftrightarrow -(x+y) \leq -2\sqrt{xy}$ ce qui est juste selon l'inégalité ci-dessus.

2. Soit $x, y \in [0,1]$, si $1-xy=0$, alors $y \neq 0$ et $1 \leq \dfrac{1}{y} = x \leq 1$, donc $x=y=1$.

   - F est continue sur $[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\}$ comme fonction rationnelle en (x,y) avec un dénominateur ne s'annulant jamais.
   - Au voisinage de $(1,1)$: $|F(x,y)| \leq \dfrac{xy\left(1-\sqrt{xy}\right)^2}{(1-xy)} = \dfrac{xy\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(1+\sqrt{xy}\right)}$, ce dernier terme tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(1,1)$. Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} F(x,y) = 0 = F(1,1)$, F est alors continue au point $(1,1)$.
   - On conclut que F est continue sur $[0,1]^2$.

3. Il est clair que $[0,1]^2$ est un fermé-borné de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie, c'est alors un compact de $\mathbb{R}^2$, F étant continue sur ce compact, elle est donc bornée et atteint ses bornes

4. Pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, on a $F(x,y) \geq 0$, donc $\inf\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y) \geq 0$, de plus cette valeur est atteinte sur les quatres segments de la frontière de $[0,1]^2$.

   On conclut que $\inf\limits_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y) = 0$ et que cette valeur est atteinte sur l'ensemble :

   $(\{0\}\times[0,1]) \cup ([0,1]\times\{1\}) \cup (\{1\}\times[0,1]) \cup ([0,1]\times\{1\})$.

5. F est de classe C^1 sur $]0,1[^2$ comme fonction rationnelle en (x,y) avec un dénominateur ne s'annulant jamais.

   - Un calcul simple fournit : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x(1-x)}{(1-xy)^2}\left(x^2y-2x+1\right)$
   - F étant symétrique en (x,y), on obtient : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(1-y)}{(1-xy)^2}\left(y^2x-2y+1\right)$

6. Soit $(x_0,y_0) \in]0,1[^2$, on alors $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ est équivaut à $\left\{\begin{array}{ll} x^2y-2x+1=0 & (1) \\ y^2x-2y+1=0 & (2) \end{array}\right.$, en faisant $y\times(1) - x\times(2)$, on trouve $x=y$, en repportant dans (1), on obtient $x^3-2x+1=0$, on remarque facilement que $x=1$ est solution, on effectue alors la division euclidienne par $(x-1)$, on aura :

   $x^3-2x+1 = (x-1)\left(x^2+x-1\right)$, ainsi $x^3-2x+1=0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=1 \\ x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \\ x=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.$, la première et troisième solution sont exclues car n'appartenant à $]0,1[$.

   Ainsi le seul point critique est $\boxed{(x_0,y_0) = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$.

7. Un calcul fastidieux donne $F(x_0,y_0) = \dfrac{5\sqrt{5}-11}{2} \approx 9.0170\times10^{-2}$.

Par ailleurs F étant nul sur la frontière de $[0,1]^2$, donc

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y) = \sup_{(x,y)\in]0,1[^2} F(x,y)$$

Et puisque F de classe C^1 et n'admet qu'un seul point critique (x_0,y_0) sur l'ouvert $]0,1[^2$, alors forcément

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} F(x,y) = \sup_{(x,y)\in]0,1[^2} F(x,y) = F(x_0,y_0).$$

Problème :

PARTIE I

1.1 Il s'agit de série géométrique, on a alors $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} z^m$ avec $R=1$.

1.2 On se ramène à une série géométrique, en effet, on a $\left|\beta e^{-it}\right| = |\beta| < 1$, donc

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = \frac{1}{1-\beta e^{-it}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \beta^m e^{-imt}$$

1.3 De même, on a $\left|\beta^{-1}e^{it}\right| = \left|\beta^{-1}\right| < 1$, donc

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = \frac{-e^{it}}{\beta}\frac{1}{1-\beta^{-1}e^{it}} = \frac{-e^{it}}{\beta}\sum_{m=0}^{+\infty} \beta^{-m}e^{imt}$$

1.4 On a $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-\beta} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-\beta}dt$

- Si $|\beta|<1$, alors $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-\beta} = \int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}-\beta}dt = \int_0^{2\pi} i\sum_{m=0}^{+\infty}\beta^m e^{-imt}dt$. Or pour tout $t\in[0,2\pi]$, $\left|\beta^m e^{-imt}\right| \leq |\beta|^m$ avec $\sum|\beta|^m$ convergente car $|\beta|<1$, donc la série $\displaystyle\sum_{m\geq 0}\beta^m e^{-imt}$ converge normalement, donc uniformément sur le segment $[0,2\pi]$, on peut alors intégrer terme à terme, on obtient : $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z-\beta} = \sum_{m=0}^{+\infty} i\beta^m\int_0^{2\pi} e^{-imt}dt$, pour $m\neq 0$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{-imt}dt = 0$, d'où
$$\int_\gamma \frac{dz}{z-\beta} = 2i\pi$$
- De même si $|\beta|>1$, alors $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z-\beta} = \int_0^{2\pi}\frac{ie^{it}}{e^{it}-\beta}dt = \frac{-1}{\beta}\int_0^{2\pi} i\sum_{m=0}^{+\infty}\beta^{-m}e^{i(m+1)t}dt$, on justifie de la même façon que cette série converge uniformément sur le segment $[0,2\pi]$, on obtient :
$\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z-\beta} = \frac{-1}{\beta}\sum_{m=0}^{+\infty} i\beta^{-m}\int_0^{2\pi}e^{i(m+1)t}dt = 0$, car $\forall\ m\geq 0$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{i(m+1)t}dt = 0$

1.5 Il est clair que $|\lambda v+\mu w| \leq |\lambda v|+|\mu w| = \lambda+\mu = 1$ car $|v|=|w|=1$. De plus l'égalité $|\lambda v+\mu w| = |\lambda v|+|\mu w|$ est réalisée si et seulement si les complexes λv et μw sont positivement liés (ont le même argument), et puisque $\lambda>0$, $\mu>0$, alors v et w sont aussi positivement liés : $\exists\ \alpha\geq 0,\ v=\alpha w$, or $|v|=|w|=1$, donc $\alpha=1$ et par suite $v=w$ qui est un cas exclu. On conclut alors que $|\lambda v+\mu w| < |\lambda v|+|\mu w| = \lambda+\mu = 1$.

PARTIE II

2.1 Un produit se dérive terme à terme, donc on aura :

$$P'(z) = a\sum_{k=1}^{r}(z-z_1)^{\alpha_1}\ldots\alpha_k(z-z_k)^{\alpha_k-1}\ldots(z-z_r)^{\alpha_r} = \sum_{k=1}^{r}\alpha_k\frac{P(z)}{z-z_k}$$

et par suite $\dfrac{P'(z)}{P(z)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r}\alpha_k\frac{1}{z-z_k}$.

2.2

2.2.1 En prenant $z = w$ dans **2.1**, alors $\dfrac{P'(w)}{P(w)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \frac{1}{w - z_k} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \frac{\overline{w - z_k}}{|w - z_k|^2} = 0$, on conclut alors en passant aux conjugués.

2.2.2 Selon le **2.2.1,** on a $w \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{|w - z_k|^2} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{|w - z_k|^2} z_k$, il suffit alors de remarquer que $\gamma = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{|w - z_k|^2} \neq 0$ ($\alpha_k \in \mathbb{N}^*$) et de poser $\beta_k = \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{\alpha_k}{|w - z_k|^2}$, alors

$$w = \sum_{k=1}^{r} \beta_k z_k, \text{ avec les } \beta_k > 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{r} \beta_k = 1$$

2.3

- Si w est racine de P' qui n'est pas racine de P, alors le résultat découle de **2.2.2**
- Si $w = z_j$ est racine commune de P et P', il suffit alors de prendre $\left(\beta_1, ..., \beta_j, ..., \beta_r\right) = (0, ..., 1, ..., 0)$.
- Ainsi les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

2.4

2.4.1 Le complémentaire de cet ensemble est $\{z_1\} \cup ... \cup \{z_r\}$ est fermé comme réunion finie de fermé, donc $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_r\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Puisque $\mathbb{U} \cap \{z_1, ..., z_r\} = \varnothing$, alors $\mathbb{U}$ est inclu dans $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_r\}$.

Enfin $z \longmapsto \dfrac{P'(z)}{P(z)}$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_r\}$ comme fonction rationnelle avec un dénominateur ne s'annulant jamais.

2.4.2. Une intégrale cuviligne se ramène à une intégrale usuelle, elle est donc linéaire, ainsi :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \left(\int_\gamma \frac{1}{z - z_k} dz \right)$$

Puis en utilisant le **1.4. :** $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z - z_k} dz = \begin{cases} 2i\pi \text{ si } |z_k| < 1 \\ 0 \text{ si } |z_k| > 1 \end{cases}$, on obtient alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=1,\ |z_k|<1}^{r} \alpha_k 2i\pi = \sum_{k=1,\ |z_k|<1}^{r} \alpha_k$$

La somme étant limité aux racines de module inférieur strictement que 1.

PARTIE III

3.1. Dans ce cas $a_k = k - n$ et $d = 2n$, donc

$$\overline{a_{d-k}} = \overline{a_{2n-k}} = (2n - k) - n = n - k = -a_k$$

Ainsi S_n est auto-inverse avec $\varepsilon = -1$.

3.2.

3.2.1. On a $a_d \neq 0$ et puisque P est auto-inverse, alors $\begin{cases} a_d = \varepsilon \overline{a_0} \\ a_0 = \varepsilon \overline{a_d} \end{cases}$, on conclut que $P(0) = a_0 \neq 0$ et $a_d = |\varepsilon|^2 a_d$, donc $|\varepsilon|^2 = 1$ et par suite $|\varepsilon| = 1$.

3.2.2.

$$P(z) = \varepsilon z^d \overline{P}\left(\tfrac{1}{z}\right) \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{d} a_k z^k = \sum_{k=0}^{d} \varepsilon \overline{a_k} z^{d-k} = \sum_{k=0}^{d} \varepsilon \overline{a}_{d-k} z^k,\ \forall\ z \in \mathbb{C}^*$$

Ceci est équivalent à

$$\sum_{k=0}^{d} a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} \varepsilon \overline{a}_{d-k} X^k$$

Car ces deux polynômes coïncident en une infinité d'éléments.

Et cette dernière égalité est réalisée si et seulement si :

$$\forall\ k \in \{0, ..., d\}\ ,\ a_k = \varepsilon \overline{a}_{n-k},\ ,\ \text{d'où l'équivalence cherchée.}\ \ (\varepsilon \neq 0)$$

3.4. L'application $\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \longmapsto \overline{z} \end{array} \right.$ est un morphisme d'anneaux, le résultat en découle.

3.4.1. On pose $Q(X) = (X-1)P(X)$, donc $\deg(Q) = d+1$, de plus on a P est auto-inverse, donc vérifie la relation (1) obtenue dans **3.2.2.,** on a alors pour $z \neq 0$:

$$-\varepsilon z^{d+1}\overline{Q}\left(\tfrac{1}{z}\right) = -\varepsilon z^{d+1}\left(\tfrac{1}{z}-1\right)\overline{P}\left(\tfrac{1}{z}\right) = -\varepsilon z^{d}(1-z)\overline{P}\left(\tfrac{1}{z}\right) = (z-1)P(z) = Q(z)$$

Ainsi Q est auto-inverse de paramètre $-\varepsilon \neq 0$, selon la question **3.2.2.**

3.4.2. On a $\deg(P_\mu) = d$ car $\mu \neq 0$ et

$$\varepsilon \mu^d z^d \overline{P}_\mu\left(\frac{1}{z}\right) = \varepsilon(\mu z)^d\,\overline{P}\left(\frac{1}{\mu z}\right) = P(\mu z) = P_\mu(z)$$

Donc P_μ est auto-inverse de paramètre $\varepsilon\mu^d \neq 0$.

3.4.3. Soit $d = \deg(P)$, on écrit $P(X) = a_d \prod\limits_{k=1}^{d}(X - z_k)$, où les z_k sont les racines complexes de module 1 de P (éventuellement confondues).

Puisque $|z_k| = 1$, alors $\overline{z_k} = \dfrac{1}{z_k}$ et

$$\begin{aligned} z^d\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) &= z^d\overline{a_d}\prod_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{z} - \overline{z_k}\right) = z^d\overline{a_d}\prod_{k=1}^{d}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_k}\right) = \overline{a_d}\prod_{k=1}^{d}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \\ &= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{d} z_k}\overline{a_d}\prod_{k=1}^{d}(z_k - z) = \frac{\overline{a_d}(-1)^n}{a_d\prod\limits_{k=1}^{d} z_k}a_d\prod_{k=1}^{d}(z - z_k) = \frac{\overline{a_d}(-1)^n}{a_d\prod\limits_{k=1}^{d} z_k}P(z) \end{aligned}$$

Ainsi P est auto-inverse de paramètre $\varepsilon = \dfrac{a_d(-1)^n\prod\limits_{k=1}^{d} z_k}{\overline{a_d}} = \dfrac{a_0}{\overline{a_d}} \neq 0$, où $a_0 = P(0)$.

3.4.4. Par exemple $P(X) = X^2 + 3iX - 1$ est auto-inverse de paramétre $\varepsilon = -1$ et dont les racines ne sont pas de module 1.

3.5. On a $\deg(R) = d$, puisque $|\varepsilon|^2 = 1$, donc Pour tout $z \neq 0$, on aura

$$\varepsilon z^d\overline{R}\left(\frac{1}{z}\right) = \varepsilon z^d\left(z^{n-d}\overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{\varepsilon}\frac{1}{z^n}Q(z)\right) = \varepsilon\left(z^n\overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right) + \overline{\varepsilon}z^{d-n}Q(z)\right) = \varepsilon R(z)$$

Ainsi R est auto-inverse de paramètre ε.

3.6.

3.6.1. Soit $z \in \mathbb{U}$, on a alors $|Q_1(z)| = |Q(z)|$ et puisque $|\varepsilon| = |z| = 1$, alors $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ et
$|Q_2(z)| = \left|\varepsilon z^n\overline{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)\right| = \left|\overline{Q}(\overline{z})\right| = \left|\overline{Q(z)}\right| = |Q(z)|$. D'où l'égalité cherchée.

3.6.2. Sinon, il existe $z_0 \in \mathbb{U}$ tel que $R(z_0) = 0$, donc $Q_1(z_0) = -\lambda Q_2(z_0)$, en passant aux modules et tenant compte du **3.6.1.,** on obtient $|\lambda| = 1$ ce qui est absurde.

3.6.3. Notons $g(\lambda) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{R'_\lambda(z)}{R_\lambda(z)}dz = \dfrac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R'_\lambda(e^{it})}{R_\lambda(e^{it})}ie^{it}dt$ cette application. On note $f(\lambda,t) = \dfrac{R'_\lambda(e^{it})}{R_\lambda(e^{it})}ie^{it}$, puisque R_λ n'a pas de racine dans $\mathbb{U}$, alors f est continue sur $[0,1[\times[0,2\pi]$, donc g est continue sur $[0,1[$. (Pas besoin de domination puisqu'on intégre sur un segment).

D'après **2.4.2.** on a $g(\lambda) = la$ somme des multiplicités des racines de R_λ de modules < 1. Ainsi g est valeurs entières.

3.6.4. g est continue sur l'intervalle $[0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc selon le théorème des valeurs intermédiares, $g([0,1[)$ est intervalle inclu dans $\mathbb{N}$, c'est forcément un singleton. On conclut que g est constante sur $[0,1[$.

3.6.5. Remarquant d'abord que $\deg(R_\lambda) = \deg Q_1 = d$, puisque g est constante, alors $g(\lambda) = g(0) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{Q_1'(z)}{Q_1(z)}dz = d$ car les racines de Q_1 sont toutes de modules < 1, donc

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{R_\lambda'(z)}{R_\lambda(z)}dz = d = \deg(R_\lambda) = \textit{la somme des racines de } R_\lambda \textit{ de modules} < 1$$

donc forcément toutes les racines de R_λ sont de toutes de modules < 1.

3.7.

3.7.1. On prend par exemple $\mu_m = \dfrac{m}{m+1} \in [0,1[$ et $Z_m = \left(z_{1,\mu_m},...,z_{d,\mu_m}\right)$, alors $(Z_m)_{m\geq 0}$ est une suite d'éléments du compact $K = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq 1\}^d$, elle admet donc une sous-suite $\left(Z_{\phi(m)}\right)_m$ convergente vers $Z = (z_1,...,z_d) \in K$, il suffit alors de poser $\lambda_m = \mu_{\phi(m)}$, qui est une suite de $[0,1[$ convergente vers 1 et les $(z_{k,\lambda_m})_m$ convergent vers z_k avec $|z_k| \leq 1$.

3.7.2. Pour tout $m \geq 0$, on a $R_{\lambda_m} = a_d \prod\limits_{k=1}^{d}(X - z_{k,\lambda_m})$, en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient le résultat.

3.7.3. Selon la question précédente, les racines z_k de R sont de modules ≤ 1.

D'autres parts, puisque R est auto-inverse alors $R(0) \neq 0$, et $R(z_k) = \varepsilon z_k^n R\left(\dfrac{1}{z_k}\right) = 0$, donc les $\dfrac{1}{z_k}$ sont aussi racines de R, donc de modules ≤ 1, donc $|z_k| \geq 1$. On conclut que les racines z_k de R sont toutes de modules 1

PARTIE IV

4.1.

4.1.1. On a $A_n = \dfrac{1-X^{n+1}}{1-X}$, donc

$$A_n(z) = 0 \Longleftrightarrow z \neq 1 \textit{ et } z^{n+1} = 1 \Longleftrightarrow z = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, \ k \in \{1,...,n+1\}$$

Ainsi les racines de A_n sont toutes simples et de module 1.

4.1.2. Soit w une racine de A_n', donc w n'est pas racine de A_n car les racines de ce dernier sont simples. D'après la question **2.2.2.,** w est un barycentre stricte des racines de A_n, donc s'écrit sous la forme : $w = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \beta_k e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$, avec les $\beta_k > 0$ et de somme 1. L'inégalité de convexité admise en **1.5.** assure que $|w| < 1$.

4.1.3. On a $B_n = XA_n'$, donc les racines de B_n sont celles de A_n', aux quelles on ajoute la racine 0, elles sont de modules < 1 selon la question précédente.

4.1.4. On a $\deg(S_n) = d = 2n$, et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(k-n)X^k + \sum_{k=n+1}^{2n}(k-n)X^k = \sum_{k=0}^{n}(k-n)X^k + \sum_{k=1}^{n}kX^{k+n} = -X^n\overline{B_n}\left(\frac{1}{X}\right) + X^{d-n}B_n(X)$$

on obtient la forme (2), avec $\varepsilon = -1$ qui de module 1 et $Q = B_n$ de degré n et dont toutes les racines sont de modules < 1. Donc selon **3.7.3.**, les racines du polynôme auto-inverse S_n sont de module 1.

4.2.

- On suppose que les racines de P sont de module 1, alors selon **3.4.3.**, P est auto-inverse et selon **2.3.**, les racines de P' sont barycentres des racines de P, donc de module ≤ 1 selon l'inégalité triangulaire.

- Inversement, si P est auto-inverse de paramètre ε, alors comme indiqué, $P(z) = \varepsilon z^d\overline{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)$, les deux termes étant holomorphes sur $\mathbb{C}^*$, en dérivant, on obtient alors

$$P'(z) = \varepsilon d z^{d-1}\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) - \varepsilon z^{d-2}\overline{P'}\left(\frac{1}{z}\right)$$

En multipliant des deux termes par z :

$$zP'(z) = \varepsilon dz^d \overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) - \varepsilon z^{d-1}\overline{P'}\left(\frac{1}{z}\right) = dP(z) - \varepsilon z^{d-1}\overline{P'}\left(\frac{1}{z}\right)$$

On pose alors $Q(X) = \dfrac{1}{d}P'(X)$, on a $\deg(Q) = n = d-1$, les racines de Q sont de module ≤ 1, et on a

$$P(z) = z^{d-n}Q(z) + \varepsilon z^n \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right)$$

Ainsi les racines de P sont de module 1 selon le résultat admis en **4.1.4.**

4.3.

4.3.1. Comme indiqué, on traite les cas d pair et d impair

- Si $d = 2p$ pair, on pose $Q = \dfrac{1}{2}a_p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{p+k}X^k$, on a alors $\deg(Q) = p$ et on vérifie alors que

$$P(z) = z^{d-p}Q(z) + \varepsilon z^p \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right) = z^p Q(z) + \varepsilon z^p \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right)$$

En effet :

– $*$ $z^p Q(z) = \dfrac{a_p}{2}z^p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{p+k}z^{k+p} = \boxed{\dfrac{a_p}{2}z^p + \displaystyle\sum_{k=1+p}^{2p} a_k z^k}$

$*$ $\varepsilon z^p \overline{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{\varepsilon\overline{a_p}}{2}z^p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \varepsilon\overline{a}_{p+k}z^{p-k}$, or P est auto-inverse, donc $a_k = \varepsilon\overline{a}_{2p-k}$, donc $\varepsilon z^p \overline{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right) =$ $\dfrac{a_p}{2}z^p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{p-k}z^{p-k} = \boxed{\dfrac{a_p}{2}z^p + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k}$

Supposons par l'absurde que Q admet une racine z de module > 1, alors

$$Q(z) = 0 \Longrightarrow a_d z^d = -\left(\frac{a_p}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p+k}z^k\right)$$

Puisque $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$, on aura :

$$|a_d| = \left|\frac{a_p}{2z^p} + \sum_{k=1}^{p-1} a_{p+k}\frac{1}{z^{d-k}}\right| < \frac{|a_p|}{2} + \sum_{k=1}^{p-1}|a_{p+k}|$$

Par ailleurs P est auto-inverse, donc $|a_k| = |a_{2p-k}|$, donc

$$\sum_{k=1}^{p-1}|a_{p+k}| = \sum_{k=1+p}^{2p-1}|a_k| = \frac{1}{2}\sum_{k=1,\ k\neq p}^{2p-1}|a_k|$$

on obtient alors

$$|a_d| < \frac{|a_p|}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1,\ k\neq p}^{2p-1}|a_k| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d-1}|a_k|$$

Ce qui est absurde, on conclut que les racines de Q sont module ≤ 1 et par conséquant les racines de P sont de module 1.

- Si $d = 2p+1$, on suivera la même idée.

4.3.2. On a les propriètés suivantes :

- $(X-1)\,P = a_d X^{d+1} + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k - a_{k+1})\, X^k - a_0$

- Puisque P est auto-inverse alors $(X-1)\,P$ l'est aussi selon **3.4.1.**

- On a $|a_d| \geq \dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k - a_{k+1}|$

  Donc le polynôme $(X-1)\,P$ vérife les hypothèses du **4.3.1.**, ses racines sont de module 1, il en alors de même pour les racines P.

4.3.3.

- L'application $\nu \longmapsto \dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k - \nu a_{k+1}|$ est continue sur le compact $\mathbb{U}$, elle bornée et atteint sa borne inférieure : il existe $\mu \in \mathbb{U}$ tel que $\dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k - \mu a_{k+1}| = \inf_{\nu \in \mathbb{U}} \dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k - \nu a_{k+1}|$.

- Puisque P est auto-inverse et $\mu \in \mathbb{U}$, alors $Q\,(X) = P\,(\mu X)$ est aussi auto-inverse (**3.4.2.)**

- $Q\,(X) = \sum_{k=0}^{d} b_k X^k$, avec $b_k = \mu^k a_k$, puisque $|\mu| = 1$, alors on a :

  $|b_d| = |a_d| \geq \dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k - \mu a_{k+1}| = \dfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{d-1} |b_k - b_{k+1}|$

  Ainsi le polynôme Q vérifie les conditions du **3.4.2.**, ses racines sont alors de module 1. Or $Q\,(z) = P\,(\mu z)$ avec $|\mu| = 1$, donc les racines P et Q ont les mêmes modules, d'où P est aussi unimodulaire.