# EXERCICE

Extrait du CCP 2014 - Maths 2 - Option MP

Soit $n$ un entier supérieur à 2 et $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n$.

**1.** Soit $p$ un projecteur de $E$.

**1.a** Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont supplémentaires dans $E$.

**1.b** En déduire que la trace de $p$ (notée $\mathrm{Tr}\,(p)$) est égale au rang de $p$ (noté $\mathrm{rg}\,(p)$).

**1.c** Un endomorphisme $u$ de $E$ vérifiant $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u)$ est-il nécessairement un projecteur de $E$ ?

**2.** Donner un exemple de deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que $A$ soit diagonalisable et $B$ ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

**3.** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ de rang 1.

**3.a** Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de $E$ telle que la matrice $Mat_\beta(u)$ de $u$ dans $\beta$ soit de la forme :

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{où } a_1, \cdots, a_n \text{ sont } n \text{ nombres réels.}$$

**3.b** Démontrer que $u$ est diagonalisable si, et seulement si, la trace de $u$ est non nulle.

**3.c** On suppose que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u) = 1$. Démontrer que $u$ est un projecteur.

**3.d** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $A$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.