# Espace Vectoriels et applications Linéaires

## Résumé



$\mathbb{K}$ sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## Loi de composition externe

NB : "." étant une lce sur E. On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda . x \in E$$

## Exemples usuels de lce (à savoir)

**Ex1 :** lce sur $\mathbb{K}[X]$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

$\lambda . P$ est la multiplication usuelle d'un polynôme $P$ par un scalaire $\lambda$ de $\mathbb{K}$.

**Ex2 :** lce sur $\mathbb{K}^n$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\lambda . x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

**Ex3 :** lce sur $\mathbb{K}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}$.

$\lambda . x = \lambda \times x$, produit de deux éléments de $\mathbb{K}$

**Ex4 :** lce sur $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{C}$

$\lambda . x = \lambda \times x$ produit usuel d'un réel avec un complexe.

**Ex5 :** lce sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\lambda . f$ est la multiplication usuelle d'une fonction par un scalaire $\lambda$ de $\mathbb{R}$

**Ex6** Cas plus général

lce sur $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^X$

où $X$ ensemble non vide.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

$\lambda . f$ est la multiplication de $f$ par le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda . f : X \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$x \longmapsto (\lambda . f)(x) = \lambda \times f(x)$$

**Ex7 :** Cas particulier "$X = \mathbb{N}$"

lce sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

$\lambda . (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la multiplication de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par le scalaire $\lambda$ de $\mathbb{K}$, c'est $(\lambda U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

# Espace vectoriel.

**Déf.**
E ensemble non vide muni d'une lci "$+$" et d'une lce "$\cdot$"
On dit que $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si et ssi
Les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $(E,+)$ est un groupe commutatif.
2) $\forall x \in E$, $1\cdot x = x$
3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, $\lambda\cdot(x+y) = \lambda x + \lambda y$.
4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$
5) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$ $\lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x$

**Vocab.** On dit aussi que E est un : $\mathbb{K}$-esp vectoriel.

## Ex usuels d'espaces vectoriels (À retenir)

1) $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est $\mathbb{K}$ esp-vect
2) $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ esp-vect
3) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ esp-vect
4) $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ esp-vect
5) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est $\mathbb{R}$ esp-vect
6) $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ esp-vect
où X est un ens non vide.
7) $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ est $\mathbb{R}$ esp-vect
où I intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

**NB.** Soit $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, où $(E, +, \cdot)$ $\mathbb{K}$ esp-vect.
1) $\lambda$ (resp $x$) est un dit scalaire (resp vecteur).
2) L'écriture "$x \cdot \lambda$" n'est pas permise.

**Prop** Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ esp-vect.

1/ $\forall x \in E,\ 0.x = 0$

2/ $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.0 = 0$

3/ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ \lambda x = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0)$

## L'espace vectoriel des applications définies sur un ensemble non vide vers un espace vectoriel.

**Prop:** Soit $X$ un ensemble non vide et $(E,+,\cdot)$ $\mathbb{K}$ espace vect.

$(\mathcal{F}(X,E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$ esp-vect, son neutre $0$ est la fonction nulle sur $X$.

## Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels

Ici : $n \geqslant 2$

$E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$ esp-vect.

**Prop :** $E_1 \times \dots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$ esp-vect, son neutre est $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

**Corollaire :** Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ esp-vect et soit $n \geqslant 2$

$(E^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$ esp-vect.

Son neutre est $(0_E, \dots, 0_E)$

## Combinaison Linéaire de vecteurs

$(E,+,\cdot)$ est ici un $\mathbb{K}$-esp vect.

**Déf :**

On appelle Combinaison Linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_n$, tout expression de la forme :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

---

**Notation :**

La combinaison linéaire $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ se note $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

---

**Prop :** Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

1/ $0$ est une combinaison Linéaire de $x_1, \dots, x_n$.

2/ $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i$ est une combinaison Linéaire de $x_1, \dots, x_n$.

---

## Sous-espaces vectoriels

$(E, +, \cdot)$ sera un $\mathbb{K}$-esp-vect.

**Prop :**

Soit $F$ une partie de $E$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

A) $\boxed{F \text{ est un sev de } E}$

B)
1/ $0_E \in F$
2/ $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$
3/ $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in F$

C)

1/ $0 \in F$

2/ $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$

D)

1/ $0 \in F$

2/ $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, (\lambda x + \mu y) \in F$.



Prop : Soit $F$ un sev de $E$, on a :

$\forall n \geq 1, \forall x_1, \dots, x_n \in F, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in F$

Prop :

$\{0\}$ et $E$ sont deux sev de $(E, +, \cdot)$

Prop :

Si $F$ un sev de $(E, +, \cdot)$, alors $(F, +, \cdot)$ est aussi un espace vectoriel.

R/R Le plus souvent, quand on nous demande de montrer qu'un ensemble est un esp-vect, on montre que c'est un sous esp vect, d'un esp vect plus grand.



Exemples usuels d'esp-vect : (à retenir)

1/ $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}$)
$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

2) $C(I,\mathbb{K})$, $D(I,\mathbb{K})$, $C^n(I,\mathbb{K})$. $C^\infty(I,\mathbb{K})$,
où $I$ est un intervalle non vide $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

## Intersection de sous-espaces vectoriels.

**Prop** : Toute intersection de sous-espaces vectoriels de $E$ est un sev de $E$.

## Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Ici $(E,+,\cdot)$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Déf** : Soit $X$ une partie de $E$.
Le sous-espace vectoriel engendré par $X$ est l'intersection de tous les sev de $E$ contenant $X$.

**Notation** : On le note $Vect(X)$.

**Prop**
$Vect(X)$ est le plus petit sev de $E$ contenant $X$.

## Cas d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $E$.
le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$, noté $Vect((x_i)_{i\in I})$, est le plus petit sev de $E$ contenant tous les vecteurs $x_i$.

**Résumé** :
1) $Vect((x_i)_{i\in I})$ est un sev de $E$.
2) $\forall i_0 \in I$, $x_{i_0} \in Vect((x_i)_{i\in I})$

3/ Soit $H$ un sev de $E$

$(\forall i\in I,\ x_i\in H) \Longleftrightarrow \operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}\subset H.$

---

**Prop :**

$\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $x_1,\dots,x_n$.

Càd :

$$\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \;/\; \forall i,\ \lambda_i\in\mathbb{K}\right\}.$$

---

**Résumé**

1/ $a\in\operatorname{Vect}(x_1,\dots,x_n) \Longleftrightarrow \left(\exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K},\ a=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)$

2/ $a\in\operatorname{Vect}(u,v) \Longleftrightarrow (\exists\, \lambda,\mu\in\mathbb{K},\ a=\lambda u+\mu v)$

3/ $a\in\operatorname{vect}(e) \Longleftrightarrow (\exists\, \lambda\in\mathbb{K},\ a=\lambda e$

---

**Réflexe à avoir :**

Soit $H$ un sev de $E$, On a :

1/ $\operatorname{Vect}(a)\subset H \Longleftrightarrow a\in H.$

2/ $\operatorname{Vect}(u,v)\subset H \Longleftrightarrow (u\in H \text{ et } v\in H).$

---

À retenir : $\operatorname{Vect}(0)=\{0\}.$

**Famille génératrice finie.**

$(E,+,\cdot)$ sera un $\mathbb{K}$ esp-vect.

**Déf :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de $E$.
$(x_1, \dots, x_n)$ est dite famille génératrice de $E$ si et ssi tout vecteur de $E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$.

**Prop :**
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de $E$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
1/ $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de $E$.
2/ $E = \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$.

**Corollaire :**
$(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\text{vect}(x_1, \dots, x_n)$

## Famille Libre finie

**Déf :** $n \in \mathbb{N}^*$
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de $E$.
$(x_1, \dots, x_n)$ est dite famille Libre si et ssi :

$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow (\forall 1 \leq i \leq n, \ \lambda_i = 0)$$

**Prop**

Toute sous-famille d'une famille Libre est une famille Libre.

**Prop** :

1) Soit $e \in E$ On a :

$$(e) \text{ Libre} \Longleftrightarrow e \neq 0$$

2) Tous les vecteurs d'une famille Libre sont non nuls.

## Famille Liée

**Déf** : Une famille de vecteurs est dite Liée si elle n'est pas Libre.

**Prop** : Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $(x_1, \dots, x_n)$ Liée

2) Ils existent $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

**Vocab** : Une surfamille de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de la forme $(x_i)_{i \in J}$ où $J \supset I$.

**Prop**

Toute surfamille d'une famille Liée est une famille Liée.

## Prop

Une famille est liée dans chacun des cas suivants :

1/ Elle contient $0$

2/ Deux de ses vecteurs sont égaux.

3/ Deux de ses vecteurs sont colinéaires

4/ L'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

# Base

$(E,+,\cdot)$ $\mathbb{K}$ esp-vect

## Déf :

Une famille qui est à la fois libre et génératrice de $E$ est dite base de $E$.

## Exemples de Bases (Base canoniques)

1/ $E=\mathbb{K}^n$ (où $n\geq 2$).

$B=(e_1,\dots,e_n)$ où $e_i=(0,\dots,0,\underset{i\text{ème place}}{1},0,\dots,0)$.

$B$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Vocabulaire $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

2/ $E=\mathbb{R}$. $B=(1)$

$B$ est une base de $\mathbb{K}$

Vocabulaire : $(1)$ est dite la base canonique de $\mathbb{K}$.

3/ $E=\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ étant $\mathbb{R}$-esp vectoriel).

$B=(1,i)$ est une base de $\mathbb{C}$.

$(1,i)$ est la base canonique de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-esp vect.

4/ $E = \mathbb{K}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}$.

$B = (1, X, \dots, X^n)$ est une base de $E$.

$B$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

## Prop

Soit $F = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une famille de vecteurs de $E$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1/ $F$ base de $E$.

2/ $\forall x \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

$$x = \lambda \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n.$$

## Déf : (Coordonnées)

Soit $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de $E$.

Soit $x \in E$.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ l'unique n-uplet tel que :

$$x = x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n.$$

$x_1, \dots, x_n$ s'appellent les coordonnées du vecteur $x$ dans la base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.

## Réflexe :

$\left( \begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \text{ les coord de } x \\ \text{dans la base } (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left( x = x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n \right)$

## Exemples usuels de coordonnées (à retenir)

1/ $E = \mathbb{K}^n$ $(n \geq 1)$.

$B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Les coordonnées de $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ sont $x_1, \dots, x_n$.

Car $(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

2) $E=\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ étant un $\mathbb{R}$-esp vect)
$B=(1,i)$ la base canonique de $\mathbb{C}$.
Les coordonnées de $z\in\mathbb{C}$ dans $(1,i)$ sont $Re(z)$, $Im(z)$.

car $z=Re(z)\times 1+Im(z).i$

3) $E=\mathbb{K}_n[X]$ (où $n\in\mathbb{N}$).
$B=(1,X,\dots,X^n)$ sa base canonique.
Soit $P=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n\in\mathbb{K}_n[X]$.
Les coordonnées de $(a_0+a_1X+\dots+a_nX^n)$

dans la base canonique $(1,X,\dots,X^n)$ sont $a_0,\dots,a_n$.

---

## Vecteurs colinéaires.

**Déf :**

Deux vecteurs $u$ et $v$ sont dits colinéaires si et ssi :

$$\left(\exists\lambda\in\mathbb{K},\ u=\lambda v\right)\text{ ou }\left(\exists\mu\in\mathbb{K},\ v=\mu u\right)$$

---

**Vocab :** On dit aussi "proportionnels"

---

**Prop :**

Supp $u\neq 0$ on a :

$$\left(u\text{ et }v\text{ colinéaires}\right)\Leftrightarrow\left(\exists\lambda\in\mathbb{K},\ v=\lambda u\right)$$

---

**Prop**

$u$ et $v\in E$ (qques)
$(u$ et $v)$ colinéaires $\Leftrightarrow$ $(u,v)$ famille liée

# Droites et plans vectoriels.

## Déf (Droite vectorielle)

Tout sev de la forme $\text{vect}(e)$ où $e$ vecteurs non nul.

## Prop :

(H) : $y' + a(x)y = 0$ et $a \in C(I, \mathbb{R})$.

l'ensemble des solutions de (H) est une droite vectorielle, engendrée par $x \longmapsto e^{-A(x)}$

où $A$ une primitive de $a$ sur $I$.

## Déf : (Plan vectoriel de l'esp vect $E$)

c'est tout sev de $E$ de la forme $\text{vect}(u, v)$

où $(u, v)$ famille libre de $E$

# Cas d'une famille quelconque

**Prop : (Pratique)**

$(x_i)_{i\in I}$ est une famille Libre de $E$ si et ssi toute sous famille finie de celle-ci est une famille libre.

## Somme de deux sev

**Déf :**

Soient $F$ et $G$ deux sev de $E$.

La somme de $F$ et $G$ est :

$$F+G=\{x_1+x_2 \,/\, x_1\in F \text{ et } x_2\in G\}$$

**Résumé :**

$$x\in F+G \Longleftrightarrow \left(\exists (x_1,x_2)\in F\times G \,/\, x=x_1+x_2\right)$$

**Prop :** Soient $F$ et $G$ deux sev de $E$

$F+G$ est un sev de $E$ contenant $F$ et $G$.

**Prop**

Soient $F$ et $G$ deux sev de $E$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) La somme $(F+G)$ est directe.

2) $\forall (x_1,x_2)\in F\times G,\ x_1+x_2=0 \Longrightarrow x_1=x_2=0$

3) $F\cap G=\{0\}$ (la plus utilisée)

## Déf : (Sous-espaces supplémentaires)

Soient F et G deux sev de E.

On dit que F et G sont deux sev supplémentaires de E si et ssi les conditions suivantes sont satisfaites :

1) $F+G$ est une somme directe

2) $E=F+G$



## Notation

Si la somme $F+G$ est directe, $F+G$ s'écrit $F\oplus G$.

## Prop

Soient F et G deux sev de E.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

A) $E=F\oplus G$

B) $\begin{cases} 1)\ F\cap G=\{0\} \\ 2)\ \forall x\in E,\ \exists (x_1,x_2)\in F\times G,\ x=x_1+x_2 \end{cases}$

C) $\forall x\in E,\ \exists!(x_1,x_2)\in F\times G,\ x=x_1+x_2$



## Somme d'un nombre fini de sev

### Déf

Soit $p\geq 2$. Soient $F_1,\dots,F_p$ des sev de E.

La somme de $F_1,\dots,F_p$ est :

$$F_1+\dots+F_p=\{x_1+\dots+x_p\ /\ \forall 1\leq i\leq p,\ x_i\in F_i\}$$

## Résumé :

$$x \in F_1 + \cdots + F_p \Longleftrightarrow \exists (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \,,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i$$

## Prop :

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sev de $E$.

$F_1 + \cdots + F_p$ est un sev de $E$ contenant tous les $F_k$.

## Déf (somme directe)

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sev de $E$.

La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est dite directe si et ssi tout vecteur $x$ de $F_1 + \cdots + F_p$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ ; où $x_i \in F_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$.

## Prop :

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sev de $E$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.

2) $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \,,\ \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Longrightarrow (\forall\, 1 \leq i \leq p,\ x_i = 0)$

## Notation :

Si la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe, Cette somme se note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, ou encore $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

## Déf :

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des sev de $E$.

On dit que $F_1, \ldots, F_p$ sont des sev supplémentaires de $E$ si et ssi :

1) La somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe.

2) $E = F_1 + \dots + F_p$

**Autrement écrit :**

$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ ; ou encore $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

**Prop :**

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sev de $E$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

**A)** $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

**B)**
$$\begin{cases} 1)\ \forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p,\ \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq p,\ x_i = 0 \\ 2)\ \forall x \in E,\ \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i \end{cases}$$

**C)** $\forall x \in E,\ \exists! (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p,\ x = \sum_{i=1}^{p} x_i$

# Applications linéaires

## Généralités

**Déf**

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-esp vect. Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

$f$ est dite application linéaire de $E$ vers $F$ si et si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x)+f(y)$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$

**Notation :**

$\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

**Prop**

$f \in \mathcal{L}(E,F) \Longrightarrow f(0)=0$

**Prop**

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $f \in \mathcal{L}(E,F)$

2) $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x+y) = \lambda f(x) + f(y)$

3) $\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y)$

**Prop**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On a :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E,\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

**Vocabulaire et notation :**

1) Si f est une application linéaire de E vers E, on dit que f est un endomorphisme de E.

2) $\mathcal{L}(E,E)$ se note $\mathcal{L}(E)$.

$\mathcal{L}(E)$ est donc l'ensemble des endomorphismes de $E$.

3) Si $\begin{pmatrix} f \in \mathcal{L}(E,F) \\ \text{et } f \text{ bijective} \end{pmatrix}$, on dit que $f$ est un isomorphisme de $E$ vers $F$.

4) Si $\begin{pmatrix} f \in \mathcal{L}(E) \\ \text{et } f \text{ bijective} \end{pmatrix}$, on dit que $f$ est un automorphisme de $E$.

5) Si $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, on dit que $f$ est une forme linéaire sur $E$

6) $GL(E)$ : c'est l'ensemble des automorphismes de $E$.

7) $Isom(E,F)$ : L'ensemble des isomorphismes de $E$ vers $F$.

## Image et image réciproque d'un sev par une applic lin

**Prop :**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) Si $H$ est un sev de $E$, alors $f(H)$ est un sev de $F$.

2) Si $L$ est un sev de $F$, alors $f^{-1}(L)$ est un sev de $E$.

**Autrement dit :**

L'image directe (resp réciproque) d'un sev par une applic lin est un sev.

## Noyau et image d'une applic linéaire

**Déf :** Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

## 1) Noyau de f :

Il est noté $\ker(f)$, et est défini par :

$$\ker(f) = \{x \in E \,/\, f(x) = 0\}$$

## 2) Image de f :

Il est noté $Im(f)$, et est défini par :

$$Im(f) = \{f(x) \,/\, x \in E\}$$

### Réflexe :

1) $x \in \ker(f) \iff f(x) = 0$

2) $x \in Im(f) \iff \exists t \in E,\ x = f(t)$

### Prop :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

i) $\ker(f)$ est un sev de $E$ (espace du départ)

ii) $Im(f)$ est un sev de $F$ (espace d'arrivée)

### Prop :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) $f$ injective $\iff \ker(f) = \{0\}$

2) $f$ surjective $\iff Im(f) = F$

### RQ pratique :

Pour montrer qu'une applic linéaire $f$ est injective, on peut commencer la rédaction comme suit :

Soit $x \in E$. Supposons que $f(x) = 0$ et montrons que $x = 0$

**Prop.**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1) $Im(f)=\{0\} \iff f=0$

2) $\ker(f)=E \iff f=0$

## Opérations sur les applications linéaires

### Combinaison linéaire d'applications linéaires

$E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-esp vect.

**Prop :**

1) $\forall f,g \in \mathcal{L}(E,F), \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}, (\alpha f+\beta g) \in \mathcal{L}(E,F)$

2) $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

### Composition d'applications linéaires

**Prop :**

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

**Prop.**

$f,g$ et $h$ étant des applications linéaires et $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$. On a :

1) $f\circ(\alpha g+\beta h) = \alpha(f\circ g)+\beta(f\circ h)$

2) $(\alpha f+\beta g)\circ h = \alpha(f\circ h)+\beta(g\circ h)$

« sous réserve d'existence des composées bien sûr »

**NB1 :**

La composée $f \circ g$ peut être notée $fg$.

**NB2 :**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f \circ (\lambda\, id_E) = (\lambda\, id_E) \circ f = \lambda f$

2) $(\lambda\, id_E)$ commute avec tout endomorphisme.

3) i) $f \circ f$ se note $f^2$.

ii) En général, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ se note $f^n$.

iii) Convention : $f^0 = id_E$.

**Prop :**

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau de neutre $id_E$.

**Déf :**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $f$ est dit nilpotent si et ssi :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*,\ f^p = 0$$

**Prop :**

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $fg = gf$. On a :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(fg)^n = f^n g^n$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f+g)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^k g^{n-k}$

(Binôme de Newton)

3) $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n - g^n = (f-g)\cdot \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-1-k}$

(Identité de Bernoulli)

NB :

Cette proposition marche en particulier quand on a $f$ et $(\lambda id_E)$ ; puisqu'ils commutent. On a ainsi :

1) $(f+\lambda id_E)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^{n-k} f^k$

2) $(f-\lambda id_E)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-\lambda)^{n-k} f^k$

3) $f^n - id_E = (f-id_E)\cdot \sum_{k=0}^{n-1} f^k = (f-id_E)(I_E + f + \dots + f^{n-1})$

## Réciproque d'un isomorphisme

Prop :

La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Prop

La composée de deux isomorphismes est un isomorphisme.

Corollaire

$(GL(E), \circ)$ est un groupe.

## Base adaptée à une décomposition en somme directe

**Prop et déf :**

Supposons que $E = F \oplus G$.

1) Si $B_F$ et $B_G$ sont deux bases respectives de $F$ et $G$ alors $B_F \sqcup B_G$ est une base de $E$.

2) $B_F \sqcup B_G$ s'appelle une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

**Prop :**

Supp que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$

1) Si $B_1, \dots, B_p$ sont des bases respectives de $F_1, \dots, F_p$, alors $B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_p$ est une base de $E$.

2) $B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_p$ s'appelle une base adaptée à la décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

**Prop :**

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sev de $E$ en somme directe.

Si $B_1, \dots, B_p$ sont des bases respectives de $F_1, \dots, F_p$, alors $B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_p$ est une base de $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

## Endomorphismes remarquables

$E$ sera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

### A) Homothéties

**Déf :**

On appelle homothétie de $E$ tout endomorphisme de $E$ de la forme $\lambda id_E$ ; où $\lambda \in \mathbb{K}$.

**Par exemple :** $0$ et $id_E$.

**À retenir :**

Les homothéties commutent avec tous les endomorphismes.

## B) Projecteurs (ou projections)

On suppose ici que : $E = F \oplus G$.

**On rappelle que :**

$$\forall x \in E, \exists ! (x_1, x_2) \in F \times G, x = x_1 + x_2$$

**Déf :**

Considérons l'application $P_F$ définie par :

$$P_F : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & P_F(x) = x_1 \end{array}$$

$P_F$ s'appelle le projecteur sur $F$ parallèlement à $G$.

**Vocabulaire :**

Soit $x \in E$.

1) $P_F(x)$ s'appelle la projection de $x$ sur $F$ parallèlement à $G$.

2) $F$ : la base du projecteur $P_F$.

$G$ : la direction du projecteur $P_F$.

$F$ et $G$ sont les éléments caractéristiques du projecteur $P_F$.

**Prop**

$P_F \in \mathcal{L}(E)$.

**Prop**

1) $\forall x\in E,\ P_F(x)\in F$

2) $\forall x\in F,\ P_F(x)=x$

3) $\forall x\in G,\ P_F(x)=0$

4) $P_F^2=P_F$

5) $P_F+P_G=id_E$ ; où $P_G$ le projecteur sur $G$ parallèlement à $F$.

**Prop**

$P_F$ étant encore la projection sur $F$ parallèlement à $G$.

1) $F=\ker(P_F-Id_E)=Im(P_F)$

2) $G=\ker(P_F)=Im(P_F-Id_E)$

**Prop**

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. On a :

1) $f$ est un projecteur de $E$ $\iff f^2=f$

2) Dans ce cas :

i) La base du projecteur $f$ est $F=\ker(f-id_E)$

ii) Sa direction est $G=\ker(f)$.

## C) Symétries

On suppose encore que : $E=F\oplus G$.

On rappelle que : $\forall x\in E,\ \exists!\,(x_1,x_2)\in F\times G,\ x=x_1+x_2$

## Déf

Considérons l'application $S_F$ définie par :

$$S_F : E \longrightarrow E$$
$$x = x_1 + x_2 \longmapsto S_F(x) = x_1 - x_2$$

$S_F$ s'appelle la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

## Vocabulaire :

Soit $x \in E$.

1) $S_F(x)$ : Le symétrique de $x$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

2) $F$ : La base de la symétrie $S_F$.

   $G$ : La direction de la symétrie $S_F$.

   $F$ et $G$ : ses éléments caractéristiques.

## Prop :

$S_F \in \mathcal{L}(E)$

## Prop :

1) $\forall x \in F,\ S_F(x) = x$

2) $\forall x \in G,\ S_F(x) = -x$

3) $S_F^2 = id_E$

4) $S_F \in GL(E)$ et $S_F^{-1} = S_F$

## Prop :

$S_F$ étant encore la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$. On a :

1) $F = \ker(S_F - id_E) = \operatorname{Im}(S_F + id_E)$

2) $G = \ker(S_F + id_E) = \operatorname{Im}(S_F - id_E)$

**Prop :**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

1) $f$ est une symétrie $\Leftrightarrow f^2 = id_E$

2) Dans ce cas, on a :

i) La base de la symétrie $f$ est $F = \ker(f - id_E)$

ii) La direction est $G = \ker(f + id_E)$

## Image d'une base par un isomorphisme

**Prop- :**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si $(x_j)_{j\in J}$ une famille génératrice de $E$ alors son image $(f(x_j))_{j\in J}$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im}(f)$.

**Prop :**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Si $\begin{pmatrix} (x_j)_{j\in J} \text{ est une famille libre de } E \\ f \text{ injective} \end{pmatrix}$ alors son image

$(f(x_j))_{j\in J}$ est une famille libre de $F$.

## Corollaire :

Soit $f$ un isomorphisme de $E$ vers $F$.

Si $(x_j)_{j\in J}$ est une base de $E$ alors son image $\big(f(x_j)\big)_{j\in J}$ est une base de $F$.

Fin