

Séries entières

Exercice 1:

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

d) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

g) $\sum_{n \geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$

j) $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$

b) $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n$

e) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

h) $\sum_{n \geq 0} z^{n^2}$

k) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

c) $\sum \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) x^n$

f) $\sum \sin(e^{-n}) x^n$

i) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

Exercice 2:

Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

- Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f .
- Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1 .
- Établir la continuité de f en -1 .
- Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 3:

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$$

Exercice 4:

Former le développement en série entière de

$$\frac{1 - z \cos t}{1 - 2z \cos t + z^2}$$

pour $|z| < 1$ et $t \in]0; \pi[$.

Exercice 5:

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Former le développement en série entière de

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{p+1}}$$

Exercice 6:

Établir que pour tout $x \in]-1; 1[$ et $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{(1-x)^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{n!} x^n$$

Exercice 7:

Former le développement en série entière en 0 de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$$

Exercice 8:

Soient $p \in \mathbb{N}$ et

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$$

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
- Calculer $f(x)$ en étudiant $(1-x)f'(x)$.

Exercice 9:

Soit f définie sur $] -1; 1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Justifier que f est développable en série entière sur $] -1; 1[$.
- Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
- Déterminer le développement en série entière de f sur $] -1; 1[$.

Exercice 10:

Soit

$$f: x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

- Déterminer l'intervalle de convergence de f .
- Exprimer la fonction f à l'aide des fonctions usuelles sur $] -1; 1[$.

Exercice 11:

Rayon de convergence et somme de

- $\sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$
- $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$
- $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2-1}$
- $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$

Exercice 12:

- Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$.

Exercice 13:

Montrer

$$1) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$2) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Exercice 14:

Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$$

En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 15:

Trouver une solution particulière non nulle sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (qu'on ne résoudra pas totalement) :

$$x^2 y'' + x(1+x)y' - y = 0$$

On la cherchera sous forme d'une série entière avant de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 16:

1. Trouver la solution f de l'équation différentielle : $y' - 2xy = 1$ vérifiant $f(0) = 0$.
2. Développer f en série entière à l'origine .
3. En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$.

Exercice 1:

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

d) $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

g) $\sum_{n \geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$ j) $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$

b) $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n$

e) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

h) $\sum_{n \geq 0} z^{n^2}$ k) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$

c) $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$

f) $\sum \sin(e^{-n}) x^n$

i) $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$

Solution

a) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+1}{3^n} z^n$

Notons $a_n = \frac{n^2+1}{3^n}$, pour tout $n \geq 0$.

$$\text{On a } \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2+1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ Le rayon de convergence est $R=3$ $\square$

b) $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n$

Notons $a_n = e^{-n^2}$, pour tout $n \geq 0$.

$$\text{On a } \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = \lim_n e^{-2n-1}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ Le rayon de convergence est $R=+\infty$ $\square$

$$c) \sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$$

$$\text{On a } \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

D'où $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$ et $\sum \frac{x^n}{n}$ ont le même rayon de convergence.

Or le RCV de $\sum \frac{x^n}{n}$ est $R=1$, d'après D'Alembert.

D'où le RCV de la SE $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n$ est $R=1$. $\square$

$$d) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} |U_n|$.

$$\text{On a } \lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \lim_n \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} |z|^{2(n+1)} \cdot \frac{n^2}{\ln n} \times \frac{1}{|z|^{2n}}$$

Et on a :

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{D'où } \lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |z|^2$$

Ainsi, d'après D'Alembert, on a:

$$\begin{cases} \text{Si } |z|^2 < \underline{1}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si } |z|^2 > \underline{1}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} |U_n| \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \underline{1}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} U_n \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \underline{1}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} U_n \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \underline{1}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \underline{1}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n} \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

Enfin, le rayon de convergence de la s\u00e9rie enti\u00e8re $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^2} z^{2n}$

est $\boxed{R = \underline{1}}$



e) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = \frac{n^n}{n!} z^{3n}$.

Appliquons D'Alembert pour la s\u00e9rie \u00e0 termes positifs $\sum_{n \geq 1} |U_n|$.

$$\text{On a } \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot |z|^{3(n+1)} \cdot \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{|z|^{3n}}$$

et on a :

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (n+1) \cdot e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e \cdot n$$

$$\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z|^3 \cdot e$$

$$\text{D'où } \lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |z|^3 \cdot e$$

Ainsi, d'après D'Alembert, on a :

$$\begin{cases} \text{Si } |z|^3 \cdot e < 1, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si } |z|^3 \cdot e > 1, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} |U_n| \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \sqrt[3]{\frac{1}{e}}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} U_n \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \sqrt[3]{\frac{1}{e}}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} U_n \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \sqrt[3]{\frac{1}{e}}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} z^{3n} \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \sqrt[3]{\frac{1}{e}}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} z^{3n} \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

Enfin, le rayon de convergence de la s\u00e9rie enti\u00e8re $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} z^{3n}$

est $\boxed{R = \sqrt[3]{\frac{1}{e}}}$ $\square$

f) $\sum \sin(e^{-n}) x^n$

On a $\sin(e^{-n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$ car $\begin{cases} \sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \\ \text{et } e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \end{cases}$

D'o\u00f9 $\sum_n \sin(e^{-n}) x^n$ et $\sum_n e^{-n} x^n$ ont le m\u00eame rayon de convergence

Posons $a_n = e^{-n}$.

On a $\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{e^{-n-1}}{e^{-n}} = e^{-1}$

D'o\u00f9 $R = e$ est le rayon de convergence de $\sum_n e^{-n} x^n$,

et donc celui de $\sum_n \sin(e^{-n}) x^n$.



$$g) \sum_{n \geq 0} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$$

Notons $a_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$, pour tout $n \geq 0$.

$$\text{On a } \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3} \times \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

$$= \lim_n \frac{(3n+3) \times (3n+2) \times (3n+1) \times \cancel{(3n)!}}{(n+1)^3 \times \cancel{(n!)^3}} \times \frac{\cancel{(n!)^3}}{\cancel{(3n)!}}$$

$$= \lim_n \frac{(3n+3) \times (3n+2) \times (3n+1)}{(n+1)^3}$$

$$= \lim_n \frac{(3n)^3}{n^3}$$

$$\lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 27$$

$\Rightarrow$ Le rayon de convergence est $R = \frac{1}{27}$ □

$$h) \sum_{n \geq 0} z^{n^2}$$

Méthode 1

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = z^{n^2}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} |U_n|$.

$$\text{On a } \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{|z|^{(n+1)^2}}{|z|^{n^2}}$$

$$= |z|^{2n+1}$$

$$= e^{(2n+1) \ln |z|}$$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| > 1 \end{cases}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } |z| < 1, \text{ la série } \sum_{n \geq 0} |U_n| \text{ converge} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } |z| > 1, \text{ la série } \sum_{n \geq 0} |U_n| \text{ diverge grossièrement.} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < 1, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > 1, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < 1, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} z^{n^2} \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > 1, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} z^{n^2} \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

Enfin, le rayon de convergence de la s\u00e9rie enti\u00e8re $\sum_{n \geq 0} z^{n^2}$ est $R = 1$



M\u00e9thode 2

C'est la s\u00e9rie enti\u00e8re $\sum_{n \geq 0} a_n z^{n^2}$, o\u00f9 :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carr\u00e9} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(a_n \cdot 1^n)_n = (a_n)_n \text{ born\u00e9e} \Rightarrow R \geq 1.$$

$$\text{et } \sum_n a_n \cdot 1^{n^2} \text{ diverge car } a_n \not\rightarrow 0_{n \rightarrow +\infty} \Rightarrow R \leq 1$$

Enfin :

$$R = 1$$



$$i) \sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $U_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n}$.

Appliquons D'Alembert pour la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} |U_n|$.

$$On a \quad \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = \frac{\pi^{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)}} |z|^{2(n+1)}}{\pi^{\sqrt{n^2+2n}} |z|^{2n}}$$

$$= |z|^2 \cdot \pi^{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)} - \sqrt{n^2+2n}}$$

D'autre part :

$$\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)} - \sqrt{n^2+2n} = \sqrt{n^2+4n+3} - \sqrt{n^2+2n}$$

$$= \frac{(\sqrt{n^2+4n+3} - \sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+4n+3} + \sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2+4n+3} + \sqrt{n^2+2n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+4n+3}^2 - \sqrt{n^2+2n}^2}{\sqrt{n^2+4n+3} + \sqrt{n^2+2n}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2n+3}{\sqrt{n^2+4n+3} + \sqrt{n^2+2n}} \\
&= \frac{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}\right)} \\
&= \frac{\left(2 + \frac{3}{n}\right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_n \left(\sqrt{(n+1)^2 + 2(n+1)} - \sqrt{n^2 + 2n} \right) = 1$$

Par suite $\lim_n \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |z|^2 \cdot \pi$

$$\begin{cases} \text{Si } |z|^2 \cdot \pi < 1, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} |U_n| \text{ converge} \\ \text{Si } |z|^2 \cdot \pi > 1, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} |U_n| \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} U_n \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} U_n \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| < \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n} \text{ converge} \\ \text{Si } |z| > \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}, \text{ la s\u00e9rie } \sum_{n \geq 0} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n} \text{ diverge grossi\u00e8rement.} \end{cases}$$

Enfin, le rayon de convergence de la s\u00e9rie enti\u00e8re

$$\sum_{n \geq 0} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} z^{2n} \text{ est } \boxed{R = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}}$$

□

j) $\sum_{n \geq 0} \sin(n) z^n$

Posons $a_n = \sin(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notons R le rayon de convergence de la s\u00e9rie enti\u00e8re cherch\u00e9.

$$(a_n \cdot 1^n)_n \text{ est une suite born\u00e9e} \Rightarrow \boxed{R \geq 1}$$

Et on a d'autre part que la s\u00e9rie num\u00e9rique $\sum_{n \geq 0} \sin(n) \cdot 1^n$, qui est

$$\sum_{n \geq 0} \sin(n), \text{ diverge, car } \sin(n) \not\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

$$\text{D'o\u00f9 } \boxed{R \leq 1}$$

La suite $(\sin(n))_n$ n'admet pas de limite.
à savoir

Enfin : $\boxed{R = 1}$

□

$$k) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$$

Rappel

Les séries entières $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence, et ce pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Les séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} \sin z^n$ ont le même rayon de convergence.

Et celui de $\sum_{n \geq 1} \sin z^n$ est égal à 1.

D'où le RCV de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2} z^n$ est égal à 1.



Fin Exercice 1

Exercice 9:

Soit f définie sur $] -1; 1[$ par

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- a) Justifier que f est développable en série entière sur $] -1; 1[$.
- b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
- c) Déterminer le développement en série entière de f sur $] -1; 1[$.

Solution

a) Rappel : le produit de 2 fonct DSE est une fonct DSE.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \text{ est développable en série entière (DSE) sur }]-1, 1[.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ l'est aussi sur }]-1, 1[.$$

$$\text{Et on a } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est DSE sur }]-1, 1[.$$

$$\text{Donc } \arcsin \text{ est aussi DSE sur }]-1, 1[.$$

$$\text{Ainsi, leur produit } x \mapsto \arcsin(x) \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est DSE sur }]-1, 1[.$$

b) Juste faire ses calculs.

c) $f: x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est impair, alors son développement en

série entière est de la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} ; x \in]-1, 1[$$

$$\forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n}$$

$$x^2 f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n+2}$$

$$x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$$

$$(1-x^2)y' - xy = 1$$

Ainsi :

$$(\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1) \Leftrightarrow \left(\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n+2} = 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in]-1, 1[, a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} (2(n+1)+1) a_{n+1} x^{2(n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in]-1, 1[, a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+3)a_{n+1} - (2n+1)a_n - a_n) x^{2n+2} = 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, (2n+3)a_{n+1} = (2n+2)a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 0, a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 1, a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 1, a_n = \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}$$

Bronillon

$$\begin{cases} a_n = \frac{2n}{2n+1} a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 = \frac{2}{3} a_0 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{(2n) \times \dots \times 2}{(2n+1) \times \dots \times 3} \cdot a_0 = \frac{1}{2n+1} \cdot a_0$$

$$a_n = \frac{(2n \times \dots \times 2)^2}{(2n+1)!}$$

$$a_n = \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!}$$

Ainsi ,

$$\left(f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1} ; x \in]-1, 1[\right)$$

devient :

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n \times n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

qui est le DSE de f .

Fin Exercice 9

Exercise 11:

Rayon de convergence et somme de

$$1) \sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$$

$$2) \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$$

$$3) \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$$

$$4) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

$$5) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1}$$

$$6) \sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$$

Solution

$$1) \sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$$

$R = +\infty$, d'après la critère de D'Alembert pour les séries entières.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n = ?$

On pense à : $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= x e^x - e^x \\ &= (x-1) e^x \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Rappel

$$2) \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$$

$R = +\infty$, encore d'après le critère de D'Alembert pour les séries entières.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n = ?$

On peut à $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Ruse à retenir

On écrit $(n+1)(n-2)$ sous la forme

$$(n+1)(n-2) = a \cdot 1 + b n + c n(n-1)$$

« C'est possible car $(1, x, x(x-1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$. »

On trouve par identification des coefficients que :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b - c = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

Et donc $(a = -2, b = 0; c = 1)$

$\Rightarrow (n+1)(n-2) = -2 + n(n-1)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2 + n(n-1)}{n!} x^n \\ &= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n \\ &= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n \\ &= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} \\ &= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= -2e^x + x^2 e^x \\
&= (x^2 - 2)e^x
\end{aligned}$$

3) $\sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

ii) $R = ?$ (D'Alembert pour les séries entières n'est pas directement applicable, du fait que $(a_n)_n$ s'annule)

Appliquons D'Alembert pour les séries numériques.

Soit $x \neq 0$.

Notons $U_n = (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = |x|^2$.

Alors $\begin{cases} \forall |x| < 1, \sum |U_n| \text{ CV et donc } \sum (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \text{ CV} \\ \forall |x| > 1, \sum |U_n| \text{ Diverge grossièrement et donc } \sum (-1)^{n+1} n x^{2n+1} \text{ Diverge.} \end{cases}$

Donc $R = 1$

ii) Soit $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = ?$

On peut à appliquer :

$$\begin{cases} \forall |x| < 1, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \text{puis que c'est la dérivée de } x \mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ de rayon} \\ \text{de convergence } 1. \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$$

$$= x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n (-1)^{n-1} x^{2(n-1)}$$

$$= x^3 \sum_{n=1}^{+\infty} n (-x^2)^{n-1}$$

$$= x^3 \frac{1}{(1 - (-x^2))^2}$$

$$= \frac{x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$4) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

i) $R = 1$, tout comme dans 3°, via D'Alembert pour les séries numériques.

ii) Soit $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = ?$

On pose :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} h(x)$$

Cas 1 : Si $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{\operatorname{arctg} h(x)}{x} \end{aligned}$$

Cas 2 : Si $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = 1 \quad (0^0 = 1 \dots)$$

$$5) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1}$$

i) $R = 1$, tout converge dans 3° , via D'Alembert pour les séries numériques.

ii) Pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1} = ?$

On a: $\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

Alors:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^{2n}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \right)$$

On pose :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arg h(x)$$

Si $x \neq 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\arg h(x)}{x}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2(n-1)+1} \\ &= \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{2n+1} \end{aligned}$$

(décalage d'indice)

$$= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$= -1 + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= -1 + x \arg h(x)$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arg h(x)$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-1 + x \operatorname{argth}(x) - \frac{\operatorname{argth}(x)}{x} \right)$$

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\} : \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{4n^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1) \operatorname{argth}(x) - x}{2x}$$

6) $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n$

i) $R = ?$

Posons $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n + \frac{1}{n+1}}{a_n} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{a_n} \right) = 1$$

Car $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, puis que $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ série à termes positifs et divergente.

D'où $R = 1$, d'après le critère de D'Alembert pour les séries entières.

ii) Soit $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n = ?$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \times 1 \right) x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} \right) x^n ; \text{ où } \begin{cases} a_k = \frac{1}{k} \quad \forall k \geq 1 \\ a_0 = 0 \\ (\forall k \geq 0, b_k = 1) \end{cases}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right)$$

Car $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, qui est $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$, est de rayon de convergence 1, et

$\sum_{n \geq 0} b_n x^n$, qui est $\sum_{n \geq 0} x^n$, est aussi de rayon de convergence 1.

Et qu'on a $|x| < 1$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)$$

$$= -\ln(1-x) \times \frac{1}{1-x}$$

$$= \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

Fin Exercice 11

Exercice 12:

- a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$

Solution

- a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Considérons la fonction $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$.

f est la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$, qui est de rayon de convergence infini.

D'où f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, f prolonge la fonction voulue $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.



Exercise 13:

Montrer

$$1) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$2) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$1) \forall x \in]-1, 1[, \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}$$

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\int_0^1 x^n dx \right)$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

admettons l'interversion pour le moment.

Justifions l'interversion :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\int_0^1 x^n dx \right)$$

Notons $f_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$.

Pour pouvoir intervenir, il suffit qu'on montre que:

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 1]$

2) $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Pour 1): c'est évident.

Pour 2):

On montrera que :

a) $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, 1]$.

b) La suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0.

Pour a):

Pour tout $x \in [0, 1]$, la série alternée $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$ converge

d'après le critère spécial pour les séries alternées : du fait que

$\left(\frac{x^n}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante de limite nulle.

Pour b):

$(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0, en effet :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, 1]$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right|$$

$$\leq \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+2} \right| \quad \left(\text{c'est le 1er terme} \right)$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+2}$$

$$\leq \frac{1}{n+2}, \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \quad \square$$

$$2) \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} ?$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1, 1[\setminus \{0\}, \frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\int_0^1 x^{2n} dx \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

(L'interversion est justifiée comme dans 19)

fin Exercice 13

Exercice 15:

Trouver une solution particulière non nulle sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (qu'on ne résoudra pas totalement) :

$$x^2 y'' + x(1+x)y' - y = 0$$

On la cherchera sous forme d'une série entière avant de l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Solution

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$x^2 y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$$

$$x y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

$$x^2 y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1}$$

$$x^2 y''(x) + x(1+x)y'(x) - y(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow -a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1) a_n + n a_n + (n-1) a_{n-1} - a_n) x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, n(n-1) a_n + n a_n + (n-1) a_{n-1} - a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, (n(n-1) + n - 1) a_n = (1-n) a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, (n^2 - 1)a_n = -(n-1)a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, (n^2 - 1)a_n = -(n-1)a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, (n+1)a_n = -a_{n-1} \quad (\text{car } \forall n \geq 2, (n-1) \neq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, a_n = -\frac{1}{n+1} a_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot 2a_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1, a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot 2a_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x > 0, y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot 2a_1 x^n$$

$$\Leftrightarrow \forall x > 0, y(x) = 2a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^n$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{-1}{n+1} \cdot a_{n-1} \\ \vdots \\ a_2 = \frac{-1}{3} a_1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1) \cdots 3} a_1$$

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot 2a_1$$

Ainsi, $y: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^n$ convient.

Exprimez $y(x)$ en fonction des fonctions usuelles

Il est clair qu'on a besoin du développement en série entière suivant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Soit $x > 0$. On a :

$$y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^n$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - (1 + (-x)) \right)$$

$$y(x) = \frac{e^{-x} - 1 + x}{x} \quad \square$$

fin exercice 15