NB : Pour $z=0$, toute SE $\sum_n a_n z^n$ converge.

2)

Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Justifier que pour $z = 0$, on a la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

Q) Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Justifier que pour $z=0$, on a la convergence de la série $\sum\limits_{n \geq 0} a_n z^n$

Rép : Notons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$.

Convention : $0^0 = 1$

Pour $z=0$. On a :

$\forall n \geq 1, \; S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k . 0^k = a_0$ $\qquad \boxed{0^k = 0 \; \forall k \geq 1}$

$\Rightarrow (S_n)_n$ converge et $\lim\limits_n S_n = a_0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n \geq 0} a_n 0^n$ converge et l'on a :

$\cancel{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n . 0^n = 0}$ Faux ! erreur à éviter !!

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n . 0^n = a_0}$$

$$\sum_n |x_n| \text{ CV} \Longrightarrow \sum_n x_n \text{ CV}$$

$\boxed{\text{Càd}}$

$$\sum_n x_n \text{ Div} \Longrightarrow \sum_n |x_n| \text{ Div}$$

$$\sum_n |x_n| \text{ CV} \Longrightarrow \sum_n x_n \text{ CV}$$

$\boxed{\text{Càd}}$

$$\sum_n x_n \text{ DIV} \Longrightarrow \sum_n |x_n| \text{ DIV}$$

par contraposée

Soit $z \in \mathbb{C}^*$

On a : $\sum_n |n! z^n|$ DIV

Donc : $\cancel{\sum n! z^n \text{ DIV}}$

Faux

C'est l'inverse qui est vrai :

Notons $U_n = |n!z|$

$\sum_{n\geq 0} U_n$ est alors une série à termes strict positifs.

On a $\lim_{n} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \dots = \lim_{n\to+\infty} |z|(n+1) = +\infty > 1$

D'Alembert $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} |n! z^n|$ Div G

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} n! z^n$ Div G

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} n! z^n$ Div

$\sum_n |x_n|$ CV $\Rightarrow \sum_n x_n$

$\boxed{\text{CU}}$

$\sum_n x_n$ div $\Rightarrow \sum_n |x$

par contraposée

Car :

$|x_n| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow x_n \longrightarrow 0$

$|x_n| \not\longrightarrow 0 \Leftrightarrow x_n \not\longrightarrow$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n!} \longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ avec } a_n = ?$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{n!} \longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \text{avec} \quad a_n = ?$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{cases} a_{2n} = \dfrac{1}{n!} \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$$

Exercice d'application (Exemple déjà vu)

Retrouver le rayon de convergence de chacune des SE suivantes :

1) $\sum_{n\geq 0} z^n$

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

3) $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$

4) $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$

Exemples 2 (CNC 2018)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de Convergence des SE suivantes :

1) $$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!(n+k)!} z^k$$

☆ 2) $$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(n+k)!} z^{2k}$$