Algèbre linéaire du Sup
Révision

Exercice 1 :

$E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f : P \mapsto P(\frac{X}{2}) - 2P(X+1)$

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Détérminer la matrice de f dans la base canonique de E.
3) Détérminer det(f) et trace de f.
   f est-il un automorphisme de E ? justifier votre réponse.

Exercice 2 :

E est un $\mathbb{R}$-esp vect de dimension 3, et $B = (e_1, e_2, e_3)$ en est une base.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$A = mat_B(f) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Détérminer trois vecteurs non nuls $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ tels que :

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) & = & 0 \\ f(\varepsilon_2) & = & \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) & = & 2\varepsilon_3 \end{cases}$$

2) Justifier que la famille $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E, puis donner la matrice de f dans cette base.(notons-la D)
3) Détérminer une matrice inversible P telle que

$$A = PDP^{-1}$$

4) i) Calculer P^{-1}

   ii) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

   iii) Considérons les suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & -1 \\ z_0 & = & 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} & = & 4x_n - 2y_n - 2z_n \\ y_{n+1} & = & x_n - z_n \\ z_{n+1} & = & 3x_n - 2y_n - z_n \end{cases}$$

   Détérminer le terme général de chacune des suites $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ *et* $(z_n)_n$.

Exercice 3 :

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit f un endomorphisme de E nilpotent d'indice n. càd $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Soit alors $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$.

1) Montrer que la famille $B = (e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$ est une base de E.
2) Ecrire la matrice de f dans la base B.

Exercice 4 :

Soit $n \geq 2$. Notons $E = \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On notera $Tr(A)$ la trace de A.

1) Montrer que Tr est une forme linéaire sur E.
2) Montrer que
$$\forall A, B \in E,\ Tr(AB) = Tr(BA)$$
3) Soit f une forme linéaire sur E vérifiant
$$\forall A, B \in E,\ f(AB) = f(BA)$$
   i) Montrer que
      a) $\forall\ 1 \leq i \neq j \leq n\ ,\ f(E_{ij}) = 0$
      b) $\forall\ 1 \leq i, j \leq n\ ,\ f(E_{ii}) = f(E_{jj})$
   ii) En déduire que f est proportionnelle à Tr.

Exercice 5 :

Soit $n \geq 2$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant
$$\forall i \in [1, n],\ |a_{ii}| \succ \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Notre objectif est de montrer que la matrice A, dite à diagonale strictement dominante, est inversible.

1) Supposons l'existence d'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul de $\mathbb{M}_{n1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = 0$.
   Soit $k \in [1, n]$ tel que $|x_k| = sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
   Montrer que $|a_{kk}x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}x_j|$
2) Aboutir à une contradiction.
3) Conclure.

Exercice 6 (CCP 2020 : Extrait et adapté)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $mat_B(f) = A$; où $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Notons $\chi_A(X) = det(XI_3 - A)$.

1) Montrer que $\chi_A(X) = (X-1)^2(X-4)$.
   Notons $E_1(f) = ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$ et $E_4(f) = ker(f - 4id_{\mathbb{R}^3})$.
2) Déterminer une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $E_1(f)$ et une base (ε_3) de $E_4(f)$.
   Notons maintenant $B_p = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
3) Vérifier que B_p est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire D, la matrice de f dans cette base.
4) Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
5) Déterminer pour tout entier naturel non nul n, les 9 coéfficients de la matrice A^n.
6) Déterminer, à partir de 4), une matrice B vérifiant $B^2 = A$.

Exercice 7 (Extrait de : Centrale 2020)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathcal{S}_n$ désignera le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.
On dit que deux permutations σ et τ de $\mathcal{S}_n$ sont *conjuguées* s'il existe une permutation $\rho \in \mathcal{S}_n$ telle que

$$\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$$

$\rho\sigma$ désignant la composée $\rho \circ \sigma$.
À toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe la matrice de permutation $P_\sigma = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ i = \sigma(j) \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

1) Pour toutes permutations ρ et ρ' de $\mathcal{S}_n$, montrer que $P_{\rho\rho'} = P_\rho P_{\rho'}$
2) En déduire que pour toutes permutations $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$, si σ et τ sont conjuguées alors P_σ et P_τ sont semblables.

Exercice 8 (Extrait de : Centrale 2020)
Soient g une application de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $M' = (m'_{ij})$ et $D = (d_{ij})$ deux matrices complexes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ j \ divise \ i \\ 0 \ sinon \end{cases} \quad et \ m'_{ij} = \begin{cases} g(j) \ si \ j \ divise \ i \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

Posons $M = M'D^T$, où D^T désigne la transposée de D.
Montrer que

$$det(M) = \prod_{k=1}^{n} g(k)$$