

Programme de mathématiques de la classe préparatoire ECS2

1 Préambule

1.1 Objectifs généraux de formation

Dans le monde de l'économie et de la gestion, le recours au formalisme, aux concepts et aux calculs mathématiques est permanent ; l'usage systématique des mathématiques dans la communication, l'information et comme outils d'aide à la prévision et à la décision est indispensable ; leur rôle dans les domaines de la finance ou de la gestion d'entreprise, de la finance de marché et des sciences sociales est important.

L'enseignement des probabilités et statistiques fournit un modèle mathématique prenant en compte l'aspect aléatoire d'un phénomène ; il permet de ce fait d'aborder des situations réelles où le hasard intervient. C'est ainsi que cette branche des mathématiques intervient dans tous les secteurs de l'économie et dans une grande variété de contextes (actuariat, biologie, épidémiologie, finance quantitative, prévision économique, etc.) où la modélisation de phénomènes aléatoires à partir de bases de données est indispensable.

L'objectif principal du programme de mathématiques dans la filière Économique et Commerciale, option Scientifique, (ECS) est de fournir aux élèves les outils nécessaires à la compréhension des modèles mathématiques employés en sciences économiques et en gestion. Ces outils sont présentés sur des exemples illustrant leur intérêt.

Une fonction fondamentale de l'enseignement des mathématiques dans ces classes est de structurer la pensée des élèves et de les former à la rigueur et à la logique en insistant sur les divers types de raisonnement (par implication directe ou par équivalence, par contraposée, par l'absurde, par analyse-synthèse, par récurrence, etc.). La démonstration mathématique nécessitant des calculs laborieux ou présentant des difficultés techniques ou conceptuelles est laissée au profits d'exemples et d'illustrations graphiques ou numériques par simulation sur ordinateur. Il ne s'agit donc ni d'un recueil de recettes utiles ni d'un cours sur les fondements de mathématiques générales.

Pour réaliser ces objectifs, les élèves sont entraînés à faire des raisonnements déductifs simples utilisant un vocabulaire claire et précis, un formalisme mathématique correct et une rigueur dans la conduite des raisonnements. Certes les futurs lauréats de la voie scientifique ne feront pas des concepteurs d'outils liés aux calculs économiques et de gestion mais ils devront être capables d'apporter un regard critique sur les hypothèses sur les quels reposent ces outils, de comprendre les concepts qui entrent en jeu et de communiquer avec des mathématiciens professionnels dans le cadre de leur futur métier.

Si les mathématiques sont un outil puissant de modélisation, que l'élève doit maîtriser, elles sont parfois plus contraignantes lorsqu'il s'agit d'en extraire une solution. L'évolution des techniques permet désormais d'utiliser aussi l'approche numérique afin de faire porter prioritairement l'attention des élèves sur l'interprétation et la discussion des résultats plutôt que sur une technique d'obtention. Cette approche permet en outre une modélisation plus fine du monde réel, par exemple par la prise en compte d'effets non linéaires ou l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. C'est aussi l'occasion pour l'élève d'exploiter les compétences acquises en informatique. C'est enfin l'opportunité de mener avec les professeurs d'informatique, d'économie et de gestion d'éventuelles démarches collaboratives.

Le programme vise aussi le développement des capacités d'expression et de communication des élèves ; cela suppose, à l'écrit, la capacité à comprendre les énoncés mathématiques, à mettre au point un raisonnement et à rédiger une démonstration et, à l'oral, celle de présenter de manière claire et synthétique une démarche ou une production mathématique. Les travaux individuels ou en équipe proposés aux élèves en dehors du temps d'enseignement (devoirs libres, interrogations orales, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales, etc.) contribuent de manière efficace à développer ces compétences. La communication utilise des moyens diversifiés auxquels il convient de familiariser les élèves : cela concerne non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément essentiel, mais aussi les dispositifs de projection appropriés (rétroprojecteur, vidéoprojecteur) et l'outil informatique.

1.2 Organisation du texte du programme

Le programme de la classe de deuxième année ECS est présenté en deux parties, chacune d'elles correspondant à une période. Chacune de ces parties définit un corpus de connaissances requises et de capacités attendues.

Le programme définit les objectifs de l'enseignement et décrit les connaissances et les capacités exigibles des élèves ; il précise aussi certains points de terminologie, certaines notations ainsi que des limites à respecter. À l'intérieur de chaque période, le programme est décliné en chapitres (numérotés 1, 2, ...). Chaque chapitre comporte un bandeau et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme et à droite les commentaires et des précisions sur ces contenus ou des exemples d'activités ou d'applications.

- le bandeau définit les objectifs essentiels, délimite le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives. Il décrit parfois sommairement les notions qui y sont étudiées ;
- les contenus fixent les connaissances exigibles des élèves, les résultats et les méthodes figurant au programme ;
- les commentaires donnent des informations sur les capacités attendues des élèves. Ils indiquent des repères et proposent des notations. Ils précisent le sens ou les limites de certaines notions ; les énoncés de certaines définitions ou de certains résultats sont parfois intégralement explicités, l'objectif étant ici d'unifier les pratiques des enseignants.

Les résultats mentionnés dans le programme seront admis ou démontrés selon les choix didactiques faits par le professeur. Pour certains résultats, marqués comme « admis », la présentation d'une démonstration en classe est déconseillée.

La chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres de chaque période ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue par chaque professeur au cours de chaque période doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période.

1.3 Contenu du programme

Le programme de mathématiques de deuxième année ECS se situe dans le prolongement de celui de première année ECS et permet d'en consolider les acquis. Son objectif est de fournir aux élèves le bagage nécessaire pour suivre les enseignements spécialisés de mathématiques, économie et gestion dispensés en Grande École ou en troisième année de Licence à l'université.

Il définit un socle de connaissances et de capacités, conçu pour être accessible à tous les élèves, en organisant de façon progressive leur introduction au cours de l'année. L'acquisition de ce socle par les élèves constitue un objectif prioritaire pour le professeur.

Le programme contribue à l'approfondissement de la culture scientifique générale en donnant aux élèves un accès à quelques domaines fondamentaux des mathématiques comme l'algèbre linéaire, dans son aspect matriciel, les probabilités qui préparent entre autre à la compréhension et la prise en compte de l'aléatoire, et enfin l'analyse où les élèves acquièrent de bonnes bases sur les notions de suite et de fonction. L'objectif n'est pas de former des professionnels des mathématiques, mais des personnes capables d'utiliser des outils mathématiques ou d'en comprendre l'usage dans diverses situations de leur parcours académique et professionnel.

L'orientation du programme vers les sciences de l'économie et de la gestion s'organise autour des quatre points forts suivants :

- En algèbre linéaire, on introduit la réduction des endomorphismes et des matrices carrées ainsi que les structures euclidiennes. Ces notions d'algèbre linéaire trouveront leurs applications lors de l'optimisation des fonctions de plusieurs variables, en probabilités (études de chaînes de MARKOV) et en analyse de données (statistique descriptive bivariée et analyse en composantes principales).
- En analyse, on complète l'étude des intégrales généralisées débutée en première année de classe préparatoire et on introduit les fonctions de plusieurs variables définies sur \mathbb{R}^n ainsi que la notion de gradient. En deuxième période, on poursuit cette étude dans le but de résoudre des problèmes d'optimisation avec ou sans contraintes, cruciaux en économie et en finance.
- En probabilité, l'étude des variables aléatoires discrètes, initiée en première année, se prolonge par l'étude des couples et des suites de variables aléatoires discrètes en première période ; en deuxième période, les notions sur les variables aléatoires à densité, abordées dès la première année, sont complétées. L'ensemble des notions sera présenté en lien avec la simulation informatique des phénomènes aléatoires. Un des objectifs est de permettre, en fin de formation, une approche plus rigoureuse et une compréhension plus aboutie des méthodes de l'estimation ponctuelle ou par intervalles de confiance.
- Les travaux pratiques de mathématiques avec Scilab sont organisés autour de sept thèmes faisant intervenir divers points du programme de mathématiques. Leur objectif est de permettre aux élèves d'approfondir leur compréhension en utilisant Scilab de manière judicieuse et autonome, ainsi que de modéliser des situations concrètes en mobilisant leurs connaissances mathématiques. Les savoir-faire et compétences que les élèves doivent acquérir lors de ces séances de travaux pratiques sont spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème. Les nouvelles notions mathématiques introduites dans certains thèmes ne font pas partie des exigibles du programme.

1.4 Organisation temporelle de la formation

Le programme de la classe de deuxième année ECS est présenté en deux parties de volume sensiblement équivalent, chacune d'elles correspondant à une période. Le programme de la première période est étudié complètement en premier lieu, lors des quatre premiers mois de l'année ; celui de la deuxième période est ensuite abordé.

Ce découpage en deux périodes d'enseignement doit être respectée. En revanche, au sein de chaque période, aucun ordre particulier n'est imposé et chaque professeur conduit, en toute liberté, l'organisation de son enseignement en veillant à alterner, de préférence, des chapitres d'analyse, de probabilité et d'algèbre linéaire.

La partie relative aux travaux pratiques de mathématiques avec Scilab doit être traitée progressivement au fur et à mesure de l'avancement du programme. Le logiciel Scilab comporte de nombreuses fonctionnalités permettant d'illustrer simplement certaines notions mathématiques. Ainsi, on utilisera dès que

possible l'outil informatique en cours de mathématiques pour visualiser et illustrer les notions étudiées.

1.5 Recommandations pédagogiques

Ce programme propose des activités dont les unes mettent en œuvre des techniques classiques et bien délimitées qui doivent être maîtrisées par les élèves, les autres visent à développer un savoir-faire ou à illustrer une idée, et avec lesquelles les élèves doivent acquérir une certaine familiarité. Les travaux dirigés sont le moment privilégié de la mise en œuvre, et de la prise en main de ces techniques classiques dont la maîtrise s'acquiert notamment grâce à des exercices et à des problèmes que les élèves doivent in fine être capables de résoudre par eux-mêmes.

Les développements formels ou trop abstraits doivent être évités ; une place importante doit être faite aux applications, exercices, problèmes, en relation chaque fois que cela est possible avec les enseignements d'économie, de gestion et d'informatique, tout en évitant les situations artificielles ainsi que les exercices de pure virtuosité technique.

Les interactions entre les différentes parties du programme sont fortes et mériteront d'être soulignées, de même que les liens avec d'autres disciplines, permettant ainsi de mettre en évidence la spécificité et la valeur de la démarche mathématique.

Le programme est présenté en deux grandes parties, mais son organisation n'est pas un plan de cours ; il va de soi que cette présentation n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre les différents domaines des mathématiques.

Les chapitres qui composent le programme suivent un ordre thématique qui n'est d'ailleurs pas le seul possible. Cette organisation a pour objet de présenter les différentes notions du programme de mathématiques et ne peut en aucun cas être considéré comme une progression de cours.

Chaque professeur adopte librement la progression qu'il juge adaptée au niveau de sa classe et conduit l'organisation de son enseignement dans le respect de la cohérence de la formation globale. Il choisit ses méthodes et ses problématiques en privilégiant la mise en activité¹ des élèves et en évitant tout dogmatisme. En effet l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les élèves sont acteurs de leur formation. Le contexte d'enseignement retenu doit motiver les élèves, favoriser l'acquisition des connaissances et permettre le développement de leurs compétences et capacités.

En contrepartie de cette liberté dans l'organisation de la progression, le respect des **objectifs de formation et son étalement dans l'année**, comme indiqués ci-dessus, reste une nécessité incontournable.

1. "Tell me and I forget, teach me and I may remember, involve me and I learn." BENJAMIN FRANKLIN (« Dis-moi et j'oublie, enseignes-moi et je peux me rappeler, implique-moi et j'apprends. »)

2 Première période

2.1 Algèbre linéaire et bilinéaire

Dans toute cette partie \mathbb{K} désignera \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2.1.1 Compléments d'algèbre linéaire

Changement de base, matrices semblables, trace

Matrice d'un endomorphisme dans une base.

Matrice de passage de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{C} .

Relation $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$.

Formules de changement de base.

Matrices semblables : deux matrices carrées M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables il existe P inversible telle que $M = PNP^{-1}$.

Définition d'un sous-espace stable par un endomorphisme.

Trace d'une matrice carrée. Linéarité de la trace ; si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$; deux matrices semblables ont même trace.

Rappels.

Notation $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}X_{\mathcal{C}}$; $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$.

Les matrices M et N peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases.

Aucune propriété exigible en plus de la définition.

Notation $\text{Tr}(M)$.

Aucune autre propriété de la trace n'est exigible ; cette notion est introduite uniquement comme outil simple et efficace pour la recherche de valeurs propres.

Éléments propres des endomorphismes et des matrices carrées

Dans tout ce paragraphe, f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbb{K} , M est une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ à coefficients dans \mathbb{K} .

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Spectre de $f \in \mathcal{L}(E)$, de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si Q est un polynôme, obtention d'éléments propres de $Q(f)$ à partir d'éléments propres de f .

Polynômes annulateurs d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

Si Q est un polynôme annulateur de f (respectivement M) et α une valeur propre de f (respectivement M), alors $Q(\alpha) = 0$.

Tout endomorphisme d'un espace de dimension finie (toute matrice carrée) admet au moins un polynôme annulateur non nul.

En dimension finie, tout endomorphisme admet un nombre fini de valeurs propres et ses sous-espaces propres sont en somme directe.

Valeurs propres des matrices triangulaires.

Notations $\text{Sp}(f)$, $\text{Sp}(M)$.

Si $f(x) = \alpha x$, $x \in E$, alors $Q(f)(x) = Q(\alpha)x$; si $MX = \alpha X$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $Q(M)X = Q(\alpha)X$.

Exemples des homothéties, des projecteurs et des symétries vectorielles.

Aucune autre connaissance sur les polynômes annulateurs ne figure au programme.

En particulier,

$$\sum_{\alpha \in \text{Sp}(f)} \dim \text{Ker}(f - \alpha \text{id}_E) \leq \dim(E).$$

Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E .

En particulier, une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre de E .

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base \mathcal{B} de E formée de vecteurs propres de f .

Caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.

L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, E est somme directe des sous-espaces propres de f .

Diagonalisabilité d'une matrice carrée : M est diagonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale.

Application au calcul des puissances d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.

$Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est alors une matrice diagonale.

f est diagonalisable si, et seulement si,

$$\sum_{\alpha \in \text{Sp}(f)} \dim \text{Ker}(f - \alpha \text{id}_E) = \dim(E).$$

En dimension n , un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1.

Interprétation matricielle des résultats précédents. M est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale. Les colonnes de P forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de M .

2.1.2 Algèbre bilinéaire

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions fondamentales de l'algèbre bilinéaire dans le cadre euclidien, i.e. pour un espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire. On identifiera \mathbb{R} et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Les endomorphismes symétriques seront traités en deuxième période.

Notion de produit scalaire

Produit scalaire sur un espace vectoriel réel, norme euclidienne associée.

Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.

Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n ; autres exemples de produits scalaires.

Cas d'égalité.

Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux.

Familles orthogonales, familles orthonormales.

On dit aussi orthonormées. On ne considérera que des familles finies.

Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre.

Théorème de PYTHAGORE.

Espaces euclidiens

Notion d'espace euclidien.

Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , muni d'un produit scalaire.

Existence de bases orthonormées.

On pourra introduire la méthode de l'orthonormalisation de Schmidt.

Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormées. Expression de la norme et du produit scalaire en bases orthonormée.

$$x = \sum_i \langle e_i, x \rangle e_i, \|x\|^2 = \sum_i \langle e_i, x \rangle^2 = {}^t X X \\ \langle x, y \rangle = {}^t X Y = \sum_i \langle e_i, x \rangle \langle e_i, y \rangle.$$

Changement de bases orthonormées.

La matrice de passage P est orthogonale : $P^{-1} = {}^t P$. Aucune autre connaissance sur les matrices orthogonales n'est au programme.

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Complétion d'une famille orthonormée en base orthonormée.

Notation F^\perp .

2.2 Fonctions réelles de n variables réelles

2.2.1 Introduction aux fonctions définies sur \mathbb{R}^n

Il s'agit de présenter la notion de fonction de n variables réelles en évitant les problèmes de nature topologique. C'est pourquoi le domaine de définition des fonctions sera systématiquement \mathbb{R}^n , muni de sa structure euclidienne canonique. L'étude de la continuité d'une fonction en un point pathologique est hors programme, de même que l'étude des recollements de formules lorsque f est définie par plusieurs formules. Dès que possible, les notions introduites seront illustrées à l'aide du logiciel Scilab.

Fonctions définies sur \mathbb{R}^n , à valeurs dans \mathbb{R} .

On donnera de nombreux exemples de fonctions de 2, 3 ou n variables réelles. Les fonctions polynomiales en font partie.

Équation du graphe d'une fonction définie sur \mathbb{R}^n . Lignes de niveau pour les fonctions de deux variables.

Cas des fonctions affines de n variables.

Continuité en un point d'une fonction f de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} .

On se limitera à des exemples simples.

f est continue au point $a \in \mathbb{R}^n$ si :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$

$$\|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Continuité d'une fonction f de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R} .

f est continue sur \mathbb{R}^n si elle est continue en tout point de \mathbb{R}^n .

Opérations algébriques sur les fonctions continues. Les fonctions polynomiales de n variables sont continues sur \mathbb{R}^n .

Somme, produit, quotient.

La composition d'une fonction continue sur \mathbb{R}^n à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} par une fonction continue de I vers \mathbb{R} est continue.

Résultat admis.

Résultat admis.

2.2.2 Calcul différentiel

Les fonctions sont ici encore définies sur \mathbb{R}^n . La détermination de la classe d'une fonction n'est pas au programme. La recherche d'extremum est abordée ici, jusqu'à la condition nécessaire du premier ordre.

Dérivées directionnelles, dérivées partielles, gradient

Composée directionnelle de f en a dans la direction $h \neq 0$. C'est la fonction de la variable réelle $t \mapsto f(a + th)$.

Fonctions partielles de f en a .

Dérivée directionnelle de f au point a dans la direction h , dérivées partielles. Notations : $\partial_h(f)$ (h vecteur non nul), $\partial_i(f)$ (i entier compris entre 1 et n).

Gradient de f en un point a .

Le gradient de la fonction f en a est le vecteur $(\partial_1(f)(a), \dots, \partial_n(f)(a))$, noté $\nabla(f)(a)$.

Fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n . Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

Somme, produit, quotient. Les fonctions polynomiales de n variables sont de classe \mathcal{C}^1 .

Résultats admis.

La composition d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} par une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I à valeurs dans \mathbb{R} est de classe \mathcal{C}^1 . Pour une fonction de classe \mathcal{C}^1 : existence et unicité d'un développement limité d'ordre 1 en un point.

Résultat admis.

$f(x + h) = f(x) + \langle \nabla(f)(x), h \rangle + \|h\| \varepsilon(h)$ où ε est une fonction continue valant 0 en 0.

Résultat admis.

Si f est de classe \mathcal{C}^1 , dérivée d'une fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(t) = f(x + th)$.

$g'(t) = \langle \nabla(f)(x + th), h \rangle$.

Interprétation géométrique du gradient.

Si h est un vecteur unitaire, la dérivée directionnelle de f au point a dans la direction h vaut $\langle \nabla(f)(a), h \rangle$.

Recherche d'extremum : condition d'ordre 1 sur \mathbb{R}^n

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.

Condition nécessaire du premier ordre : si une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n admet un extremum local en un point a , alors $\nabla(f)(a) = 0$. Point critique.

Les points où le gradient s'annule sont appelés points critiques. Toutes les dérivées directionnelles en un tel point sont nulles.

2.3 Compléments de probabilités ; couples et n-uplets de variables aléatoires réelles

Ce chapitre consolide les acquis de première année, en particulier sur les variables aléatoires discrètes. Il prolonge ces acquis en permettant l'étude simultanée de plusieurs variables aléatoires réelles, i.e. l'étude de vecteurs aléatoires.

Dans le cadre discret la notion de famille sommable est fondamentale. Mais le programme ne comporte pas de partie présentant cette notion et les propriétés correspondantes. On se limitera donc à une approche heuristique. Aucune difficulté ne sera soulevée sur cette notion et tout exercice ou problème y faisant référence devra impérativement rappeler les énoncés utiles. On se limitera aux énoncés suivants, admis sans démonstration :

- On admettra que les manipulations ensemblistes classiques (produits cartésiens finis, réunions dénombrables) d'ensembles dénombrables fournissent encore des ensembles dénombrables. On remarquera en particulier que l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable ;
- Soit I un ensemble en bijection avec \mathbb{N} , $I = \{\varphi(n), n \in \mathbb{N}\}$, avec φ bijective. Si la série $\sum_n u_{\varphi(n)}$ converge absolument alors, pour toute bijection ψ de \mathbb{N} sur I , $\sum_n u_{\psi(n)}$ converge absolument et les deux séries ont même somme. Elle pourra être notée $\sum_{i \in I} u_i$. Dans ce cadre de convergence absolue toutes les opérations usuelles (somme, produit, regroupement par paquets) sont licites. Ainsi

$$\checkmark \text{ Si } I = \cup_j I_j \text{ est une réunion disjointe on a } \sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i,$$

$$\checkmark \text{ Si } I \text{ et } J \text{ sont dénombrables, } \left(\sum_{i \in I} u_i \right) \left(\sum_{j \in J} v_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j.$$

On admettra que les théorèmes ou les techniques classiques sur les séries s'étendent dans ce cadre.

2.3.1 Compléments d'analyse

Reste d'une intégrale convergente.

Pratique de l'intégration par parties pour les intégrales sur un intervalle quelconque.

Changement de variables : si f est continue sur $]a, b[$, si φ est une bijection de $]u, v[$ sur $]a, b[$, croissante et de classe \mathcal{C}^1 , alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$

et $\int_u^v f(\varphi(s))\varphi'(s) ds$ sont de même nature ; en cas de convergence leurs valeurs sont égales.

L'intégration par parties sera pratiquée pour des intégrales sur un segment, on effectuera ensuite un passage à la limite.

Énoncé similaire dans le cas φ décroissante.

Les changements de variables non affines doivent être indiqués.

2.3.2 Généralités sur les variables aléatoires réelles

Tribu (ou σ -algèbre) \mathcal{B} des boréliens de \mathbb{R} .

Pour tout borélien B et pour toute variable aléatoire réelle X définie sur (Ω, \mathcal{A}) le sous-ensemble $\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in B\}$ appartient à \mathcal{A} .

σ -algèbre associée à X : c'est la plus petite tribu contenant les événements $\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \leq x\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le maximum d'une famille finie de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire réelle.

Idem pour le minimum.

Une somme, un produit de variables aléatoires réelles est une variable aléatoire réelle.

Aucun développement théorique sur la tribu des boréliens n'est au programme.

Résultat admis.

Notation : \mathcal{A}_X ; elle représente l'information apportée par X .

Résultat admis.

2.3.3 Couples de variables aléatoires

Cas général

La loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles est donnée par la fonction

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq y]),$$

notée $F_{X,Y}$ et appelée fonction de répartition conjointe du couple.

Si deux couples (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) ont même loi et si g est une fonction continue sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} , alors les variables aléatoires $g(X_1, Y_1)$ et $g(X_2, Y_2)$ ont la même loi.

Indépendance de deux variables aléatoires.

Caractérisations de l'indépendance de deux variables aléatoires.

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y$, les événements A et B sont indépendants.

Espérance conditionnelle dans le cas de l'indépendance.

Couple de variables aléatoires réelles discrètes. Stabilité de lois discrètes

Caractérisation de la loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes.

Caractérisation de l'indépendance d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes.

La loi de X (respectivement Y) est appelée loi marginale d'indice 1 (resp. 2). La fonction de répartition de la loi de X (resp. Y) vérifie $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y)$ (resp. $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x, y)$).

La connaissance des lois marginales ne suffit pas à déterminer la loi du couple.

Résultat admis.

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tous réels x et y , $\mathbb{P}([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = \mathbb{P}([X \leq x])\mathbb{P}([Y \leq y])$. Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tous intervalles I et J de \mathbb{R} ,

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}([X \in I])\mathbb{P}([Y \in J]).$$

Résultats admis.

Si X est une variable aléatoire discrète admettant une espérance et si Y est indépendante de X alors, pour tout événement $A \in \mathcal{A}_Y$ de probabilité non nulle, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X|A)$. Cela signifie que la connaissance de Y n'apporte aucune information dans les calculs qui concernent X .

La loi d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes est caractérisée par la donnée des valeurs $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Dans ce cas particulier, X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = y]).$$

Loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes, produit de convolution discret.

Stabilité des lois binomiales et de POISSON.

$$\mathbb{P}([X + Y = z]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x])\mathbb{P}([Y = z - x]).$$

Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(m, p)$, $\mathcal{B}(n, p)$ (resp. $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{P}(\mu)$) alors $X + Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m + n, p)$ (resp. $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$).

Couple de variables aléatoires réelles à densité. Stabilité de lois à densité

Densité de la somme $Z = X + Y$ de deux variables aléatoires à densité indépendantes, produit de convolution.

On admet le résultat suivant : si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt$ converge pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus D$, où D est un sous-ensemble fini de \mathbb{R} , et si $g : x \in \mathbb{R} \setminus D \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt$ est continue alors c'est une densité de Z (au sens du programme qui exige cette régularité).

On peut montrer que si une des densités est bornée, les hypothèses du résultat ci dessus sont vérifiées.

Rappels de première année.

Notation : Φ .

Lois gaussiennes.

Propriété de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Lois gamma. Espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi gamma de paramètre $\nu > 0$.

X admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Stabilité des lois gaussiennes, des lois gamma.

Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ (respectivement $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, $\mathcal{N}(b, \tau^2)$) alors $X + Y$ suit la loi $\gamma(a + b)$ (resp. $\mathcal{N}(a + b, \sigma^2 + \tau^2)$).

2.3.4 Espérance de variables aléatoires réelles

Généralités et rappels

$\mathbb{E}(X)$ a été définie en première année.

Sous réserve d'absolue convergence d'une série (cas discret) ou d'une intégrale (cas à densité).

Existence d'une espérance par domination.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes vérifiant $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement et si Y admet une espérance alors X admet une espérance ; dans ce cas, $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y)$. Résultat admis.

Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance.

La démonstration n'est exigible que dans des cas particuliers, notamment le cas discret fini.

Espérance conditionnelle.

Si A est un événement de probabilité non nulle, $\mathbb{E}(X|A)$ est l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle \mathbb{P}_A , si cette espérance existe.

Formule de l'espérance totale, cas discret :

si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements, si X est une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) , alors X admet une espérance pour \mathbb{P} si, et seulement si, on a convergence absolue de la série

$$\sum_{(x,i) \in D \times J} x \mathbb{P}_{A_i}(X = x) \mathbb{P}(A_i).$$

Dans ce cas $\mathbb{E}(X)$ est la somme de cette série.

Transfert à une variable, dans le cas à densité. Moments

Dans le cas discret les résultats correspondants ont été vus en première année.

Exemples simples de calculs de fonctions de répartition et de densités de fonctions d'une variable aléatoire X à densité.

Théorème de transfert : si X admet une densité f qui est nulle en dehors de $]a, b[$, et si φ est une fonction continue sur $]a, b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points, l'espérance de $\varphi(X)$ existe et est égale à $\int_a^b \varphi(x) f(x) dx$ si, et seulement si, cette intégrale est absolument convergente.

Variance, écart-type. Variables aléatoires centrées, centrées réduites.

Variance d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle (uniforme, exponentielle, normale).

Moment d'ordre r , r entier naturel non nul.

Transfert à deux variables dans le cas discret

Loi d'une variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ où g est une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Espérance de $Z = g(X, Y)$ et théorème de transfert.

Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes.

Covariance de deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2. Propriétés.

Formule de HUYGENS.

L'ensemble I est supposé fini ou dénombrable, J désigne l'ensemble des indices i tels que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$. L'ensemble D de la sommation est n'importe quel sous ensemble fini ou dénombrable de \mathbb{R} tel que $\mathbb{P}(X \in D) = 1$. Il est à noter que, sous les hypothèses ci-contre, $\mathbb{E}(X|A_i)$ existe pour tout i élément de J et que $\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in J} \mathbb{E}(X|A_i) \mathbb{P}(A_i)$.

On traite les cas $Y = aX + b$ (vu en première année) $Y = X^2$ et $Z = \varphi(X)$ avec φ de classe C^1 et strictement monotone.

Ce résultat pourra être démontré dans des cas simples. Il sera admis pour le cas général.

Exemples de variables aléatoires n'admettant pas d'espérance ou de variance.

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

On se limitera à des cas simples.

Résultat admis : sous réserve de convergence absolue :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y) \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance avec en plus $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$. Démonstration non exigible. Notation : $\text{Cov}(X, Y)$.

Bilinéarité, symétrie, positivité de la covariance.

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y).$$

Variables décorréées. Des variables indépendantes sont décorréées, la réciproque est fautive.
 Coefficient de corrélation linéaire.
 Propriétés.
 Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes.

Des variables X et Y admettant un moment d'ordre 2. sont dites décorréées lorsque $\text{Cov}(X, Y) = 0$.
 Notation : $\rho(X, Y)$.
 $\rho(X, Y) \in [-1, +1]$. Cas extrêmes.

Résultats sur l'espérance dans le cas d'un couple de variables indépendantes et à densité

Espérance d'un produit de variables aléatoires à densité indépendantes.

Si X et Y sont deux variables aléatoires à densité indépendantes admettant une espérance, alors XY admet également une espérance avec en plus $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$. Résultat admis.

Variance de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes admettant un moment d'ordre 2.

2.3.5 Vecteur aléatoire réel

On étend les résultats des paragraphes précédents au cas d'un n -uplet de variables aléatoires réelles (X_1, X_2, \dots, X_n) , ce qu'on appelle aussi un vecteur aléatoire réel. Les techniques permettant de déterminer la loi ou de calculer l'espérance d'une variable $Y = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ne sont pas au programme.

Les résultats qui suivent sont donc pour la plupart admis, ils généralisent à n variables les résultats obtenus pour les couples.

La loi d'un n -uplet (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires réelles est donnée par la fonction

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{P}(\cap_{i=1}^n [X_i \leq x_i])$$

notée F_{X_1, \dots, X_n} .

Si deux n -uplets (X_1, \dots, X_n) et (Y_1, \dots, Y_n) ont même loi et si g est une fonction continue sur \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} , alors les variables aléatoires $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.

Indépendance mutuelle de n variables aléatoires.

La loi de X_i est appelée loi marginale d'indice i . La connaissance des lois marginales ne suffit pas à déterminer la loi du n -uplet (X_1, \dots, X_n) .

Résultat admis.

Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n [X_i \leq x_i]) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i \leq x_i]).$$

Caractérisations de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires.

On a indépendance mutuelle si, et seulement si, pour toute famille d'intervalles réels I_1, \dots, I_n ,

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n [X_i \in I_i]) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i \in I_i])$$

On a indépendance mutuelle si, et seulement si, quels que soient $A_1 \in \mathcal{A}_{X_1}, \dots, A_n \in \mathcal{A}_{X_n}$, les événements A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants. Dans le cas de n variables aléatoires discrètes, on a indépendance mutuelle si, et seulement si, quel que soit $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n [X_i = x_i]) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}([X_i = x_i])$$

Lemme des coalitions.

Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes alors, pour tout k de $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$, toute variable aléatoire Y fonction de X_1, \dots, X_k est indépendante de toute variable aléatoire Z fonction de X_{k+1}, \dots, X_n . Démonstration non exigible.

Espérance d'un produit de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes et admettent une espérance alors la variable produit $\prod_{i=1}^n X_i$ admet une espérance qui vérifie $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$. Résultat admis.

Variance d'une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes et admettent un moment d'ordre 2 alors la somme $S = \sum_{i=1}^n X_i$ admet un moment d'ordre 2 et la variance de S vérifie $V(S) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$. Résultat admis.

Stabilité étendue aux vecteurs aléatoires.

Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes et si la loi de X_i est binomiale $\mathcal{B}(n_i, p)$ (respectivement gamma (ν_i) , normale $\mathcal{N}(a_i, \sigma_i^2)$, Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$) alors la loi de S est binomiale $\mathcal{B}(\sum_i n_i, p)$ (resp. $\gamma(\sum_i \nu_i)$, $\mathcal{N}(\sum_i a_i, \sum_i \sigma_i^2)$, $\mathcal{P}(\sum_i \lambda_i)$).

Indépendance mutuelle dans le cas d'une suite infinie de variables aléatoires discrètes.

3 Seconde période

3.1 Compléments d'algèbre bilinéaire

3.1.1 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien, matrices symétriques

Endomorphismes symétriques.

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel euclidien E est dit symétrique si, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$.

Un endomorphisme est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Si f est un endomorphisme symétrique et si F est un sous-espace vectoriel stable par f , alors F^\perp est aussi stable par f .

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien sont deux à deux orthogonaux.

Si u_1, \dots, u_p sont des vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres distinctes alors ils forment une famille orthogonale (libre).

3.1.2 Projection orthogonale

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F .

Notation p_F .

Si (u_1, \dots, u_k) est une base orthonormée de F , alors pour tout vecteur x de E ,

Si \mathcal{B} est une base orthonormée de E et si, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $U_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_i)$ alors

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^k \langle u_i, x \rangle u_i.$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \sum_{i=1}^k U_i {}^t U_i.$$

Caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur par minimisation de la norme.

$$y = p_F(x) \iff \|x - y\| = \min_{z \in F} \|x - z\|.$$

Application aux problème de moindres carrés.

Minimisation de $X \mapsto \|AX - B\|$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant des matrices fixées. La formule donnant la valeur de X réalisant le minimum n'est pas exigible.

Si p est un projecteur, alors p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, c'est un endomorphisme symétrique.

3.1.3 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques

Si E est un espace vectoriel euclidien, tout endomorphisme symétrique f de E est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Résultat admis.

Il existe une base orthonormée \mathcal{B} de E formée de vecteurs propres de f .

Toute matrice symétrique réelle M est diagonalisable avec une matrice de changement de base orthogonale.

Forme quadratique q_M définie sur \mathbb{R}^n associée à une matrice symétrique réelle M d'ordre n .

Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $M = PDP^{-1} = PD^tP$. Les colonnes X_1, \dots, X_n de P sont des vecteurs propres de M associés respectivement à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ils forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i {}^tX_i$.

$q_M(h) = {}^tHMH$ où $h \in \mathbb{R}^n$ et H la colonne des coordonnées de h .

Le programme n'exige aucun résultat sur cette notion qui est introduite principalement en vue de l'étude des fonctions de classes C^2 sur \mathbb{R}^n .

3.2 Fonctions réelles de n variables réelles ; recherche d'extremums

L'objectif est d'arriver à une bonne maîtrise des problèmes d'extrema à partir d'un minimum d'outils théoriques. L'espace \mathbb{R}^n sera muni de la norme euclidienne usuelle. La détermination de la nature topologique d'un ensemble n'est pas un objectif du programme ; elle devra toujours être précisée. Néanmoins, il est nécessaire de sensibiliser les élèves aux notions d'ouvert et de fermé.

3.2.1 Notion de fonction réelle définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^n

Continuité pour une fonction réelle définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^n .

Point-frontières d'un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . Notions d'ouvert de \mathbb{R}^n .

Classe C^1 pour une fonction réelle définie sur un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

Ne pas soulever de difficulté théorique.

Si φ est une fonction réelle continue sur \mathbb{R}^n et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) < \alpha\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) > \alpha\}$ sont des ouverts de \mathbb{R}^n .

Pour une telle fonction, extensions sans difficultés de toutes les notions vues en première période : dérivées partielles, gradient, dérivée directionnelle, développement limité d'ordre 1.

3.2.2 Fonctions de classe C^2

Pour une fonction réelle f définie sur un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n : dérivées partielles d'ordre 2.

Fonctions de classe C^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n .

Opérations sur les fonctions de classe C^2 .

Composée $g \circ f$ de fonctions de classe C^2 , f (resp. g) étant de classe C^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n (resp. un intervalle I de \mathbb{R}) sous la condition $f(\mathcal{U}) \subset I$.

Théorème de SCHWARZ.

Notation $\partial_{i,j}^2(f)$, $\partial_i(\partial_j(f))$.

Les fonctions polynomiales de n variables sont de classe C^2 sur \mathbb{R}^n . Résultat admis.

Somme, produit, quotient. Résultats admis.

Résultat admis.

Si f est de classe C^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , en tout point x de \mathcal{U} et pour tout couple (i, j) on a $\partial_{i,j}^2(f)(x) = \partial_{j,i}^2(f)(x)$. Résultat admis.

Matrice hessienne en un point x .

Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^n , la matrice hessienne est, en tout point x de \mathcal{U} , une matrice symétrique.

Développement limité d'ordre 2 en x élément de l'ouvert \mathcal{U} pour f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathcal{U} .

Dérivée seconde directionnelle de f au point x dans la direction h .

3.2.3 Recherche d'extremums

Définition d'un extremum local, d'un extremum global.

Notion de sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^n .

Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée admet un maximum global et un minimum global.

Application à l'encadrement de la forme quadratique q_M sur \mathbb{R}^n associée à une matrice symétrique M .

Point critique.

Condition nécessaire du premier ordre.

Notation $\nabla^2(f)(x)$.

On note $q_{f,x}$ la forme quadratique associée.

$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla(f)(x), h \rangle + \frac{1}{2}q_{f,x}(h) + \|h\|^2\varepsilon(h)$ où ε est continue sur \mathcal{U} et vaut 0 en 0.

Résultat admis.

C'est $q_{f,x}(h)$.

Si g est la fonction de la variable réelle définie par $g(t) = f(x+th)$ alors $g''(0) = q_{f,x}(h)$; on a plus généralement $g''(t) = q_{f,x+th}(h)$.

Fermé ne signifie pas non ouvert mais de complémentaire ouvert.

Si φ est une fonction réelle continue sur \mathbb{R}^n et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) \leq \alpha\}$ et $\{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) \geq \alpha\}$ sont des fermés de \mathbb{R}^n . Idem pour l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n ; \varphi(x) = \alpha\}$.

Résultat admis.

Le maximum comme le minimum peuvent être atteints en plusieurs points.

q_M admet un maximum global et un minimum global sur la partie fermée bornée $\{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 1\}$; il existe donc des réels α, β tels que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \|h\|^2 \leq q_M(h) \leq \beta \|h\|^2.$$

Les points où le gradient s'annule sont appelés points critiques. Toutes les dérivées directionnelles en ces points sont nulles.

Si une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{U} admet un extremum local en un point x_0 de \mathcal{U} alors x_0 est point critique de f .

Étude locale d'une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert \mathcal{U} en un point critique x_0 .

Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0)$ sont toutes strictement positives (respectivement négatives) alors f admet un minimum (resp. maximum) local en x_0 .

Si $\nabla^2(f)(x_0)$ admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative alors f ne présente pas d'extremum en x_0 .

On fera le lien avec le signe de la forme quadratique q_{f,x_0} . On pourra également pratiquer, sur des exemples, une décomposition en carrés de GAUSS.

Point selle (ou col).

Exemples de recherche d'extrema globaux.

On peut faire une étude directe du signe de $f(x) - f(x_0)$, utiliser le spectre de $\nabla^2(f)(x_0)$, utiliser la formule de TAYLOR avec reste intégrale pour la fonction $t \mapsto f(x_0 + th)$.

3.2.4 Recherche d'extremums sous une contrainte de classe \mathcal{C}^1

Dans tout ce paragraphe, \mathcal{U} désigne un ouvert de \mathbb{R}^n et φ désigne une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} . On note alors \mathcal{C} l'ensemble des points x de \mathcal{U} tels que $\varphi(x) = c$, où c est un réel fixé. On se limite au cas de contrainte non critique, i.e. $\nabla(\varphi)(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$, et on étudie alors les extremums de $f(x)$ pour x appartenant à \mathcal{C} . Une interprétation graphique sera proposée lorsqu'elle est simple à présenter.

Définition d'un extremum local ou global sous la contrainte $\varphi(x) = c$ d'une fonction f définie sur \mathcal{U} . Condition nécessaire du premier ordre pour un extremum sous contrainte non critique \mathcal{C} .

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} et si f admet un extremum local en x_0 sous la contrainte non critique \mathcal{C} , alors il existe un réel λ vérifiant

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = c, \\ \nabla(f)(x_0) = \lambda \nabla(\varphi)(x_0). \end{cases}$$

Résultat admis.

Application à l'encadrement d'une forme quadratique q_M associée à une matrice symétrique M . Cas d'égalité.

q_M est bornée sur $\{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 1\}$ et atteint ses bornes en des points correspondants à des vecteurs propres de la matrice M . Si α et β désignent respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de M alors

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \|h\|^2 \leq q_M(h) \leq \beta \|h\|^2.$$

Pour $h \neq 0$, l'inégalité de gauche (resp. de droite) est une égalité si, et seulement si, la colonne H des coordonnées de h est vecteur propre de M associé à la valeur propre α (resp. β).

3.2.5 Recherche d'extremums sous contrainte d'égalités linéaires

Condition nécessaire du premier ordre pour un extremum de f sous la contrainte \mathcal{C} formée de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = c_1, \\ \vdots \\ \varphi_p(x) = c_p. \end{cases}$$

Point critique pour l'optimisation sous contraintes. Exemples de recherche d'extremums sous une contrainte d'égalités linéaires.

Si f de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant \mathcal{C} la condition est :

$$\nabla(f)(x) \in \text{Vect}\left(\nabla(\varphi_1)(x), \dots, \nabla(\varphi_p)(x)\right).$$

Traduction par orthogonalité.

3.3 Convergence d'une suite de variables aléatoires

3.3.1 Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV

Inégalité de MARKOV.

Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout réel $a > 0$,

$$\mathbb{P}(\{X \geq a\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

Si X est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Application de l'inégalité de MARKOV à $X - \mathbb{E}(X)$.

3.3.2 Convergence en probabilité

Définition de la convergence en probabilité.

On dit qu'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles convergence en probabilité vers une variable aléatoire X si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Notation $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Loi faible des grands nombres pour une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ la moyenne arithmétique des variables aléatoires X_1, \dots, X_n , alors la suite $(\bar{X}_n)_n$ converge en probabilité vers m .

Composition par une fonction continue.

Si $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X et si f est une fonction continue sur \mathbb{R} alors $(f(X_n))_n$ converge en probabilité vers $f(X)$.

Démonstration non exigible.

3.3.3 Convergence en loi

Définition de la convergence en loi pour une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles vers X .

Pour tout réel x où la fonction de répartition F_X de X est continue on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{X_n \leq x\}) = F_X(x).$$

Cas où les X_n et X sont à valeurs dans \mathbb{Z} .

Notation $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

La convergence en loi équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{X_n = k\}) = P(\{X = k\}).$$

Exemples classiques de convergences en loi.

Si la loi de X_n est binomiale de paramètre p_n et si $p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$ alors la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X de loi de POISSON de paramètre λ .

Théorème de SLUTSKY : si la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X et si la suite $(Z_n)_n$ converge en loi vers une constante c , alors la somme $(X_n + Z_n)_n$ converge en loi vers $X + c$ et le produit $(X_n Z_n)_n$ converge en loi vers cX .

Démonstration non exigible.

Composition par une fonction continue.

Si $(X_n)_n$ converge en loi vers X et si f est une fonction continue sur \mathbb{R} alors $(f(X_n))_n$ converge en loi vers $f(X)$.

Démonstration non exigible.

Théorème de la limite centrée : si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, admettant espérance m et variance $v \neq 0$, alors la suite des moyennes arithmétiques centrées réduites $(\bar{X}_n^*)_n$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

La moyenne arithmétique d'indice n est $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, qui devient après centrage-réduction

$$\bar{X}_n^* = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{v}}.$$

Approximation gaussienne de lois binomiales ou de POISSON.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\{a \leq \bar{X}_n^* \leq b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Toutes les indications devront être fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.

3.4 Estimation

L'objectif de cette partie est d'introduire le vocabulaire et la démarche de la Statistique inférentielle en abordant, sur quelques cas simples, le problème de l'estimation, ponctuelle ou par intervalle de confiance. On se restreindra à une famille de lois de probabilités indexées par un paramètre scalaire (ou vectoriel) dont la valeur (scalaire ou vectorielle) caractérise la loi. On cherche alors à estimer la valeur du paramètre (ou une fonction simple de ce paramètre) à partir des données disponibles.

Dans ce contexte, on considère un phénomène (expérience) aléatoire et on s'intéresse à une variable aléatoire relative à cette expérience, dont on suppose que la loi de probabilité n'est pas complètement spécifiée. C'est cette loi qui est l'objectif de notre travail de statistique.

Dans la pratique on possède des connaissances sur le type de loi recherché. Par exemple si la loi est une durée de fonctionnement sans phénomène d'usure et mesurée en temps continu on pense à une loi exponentielle.

On suppose dans le cadre du programme qu'il en est ainsi : la loi de X , qui n'est pas complètement spécifiée, appartient à une famille de lois indexées par un paramètre réel, parfois par un paramètre dans \mathbb{R}^2 (penser aux lois gaussiennes). On note Θ l'ensemble indexant la famille, $(F_\theta)_{\theta \in \Theta}$ la famille des fonctions de répartition de X possibles. Le paramètre θ est une quantité inconnue, fixée dans toute l'étude, que l'on cherche à déterminer ou pour laquelle on cherche une information partielle.

Dans la pratique on a souvent la possibilité d'observer des répétitions indépendantes du phénomène et obtenir un échantillon de données donnant pour X des résultats réels x_1, \dots, x_n . Et c'est à partir de la donnée concrète (x_1, \dots, x_n) élément de \mathbb{R}^n qu'il faut trouver la vraie valeur de θ ou de $g(\theta)$ (fonction du paramètre θ) ou au moins une valeur estimant le vrai θ , un intervalle contenant le vrai θ . Cette fonction du paramètre représentera en général une valeur caractéristique de la loi inconnue comme son espérance, sa variance, son étendue ...

3.4.1 Estimation ponctuelle

On se place dans le cadre de Statistique paramétrique évoqué ci-dessus et on suppose que cet échantillon est la réalisation de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n définies sur un même espace probabilisable muni d'une famille de probabilités $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$. Les X_1, \dots, X_n seront supposées \mathbb{P}_θ -indépendantes et de même loi que X pour tout $\theta \in \Theta$.

Définitions générales

On appelle échantillon de taille n (n -échantillon) la donnée de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes et de même loi. Cette loi est notée L_θ , sa fonction de répartition F_θ .

On appelle estimateur de θ toute variable aléatoire de la forme $Y = \varphi(X_1, \dots, X_n)$ où φ est une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^n . Si x_k désigne la valeur obtenue pour X_k (lors de la k -ième répétition de l'expérience) le nombre $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est, pour l'estimateur choisi, la valeur qu'on attribue au paramètre θ inconnu.

Estimer ponctuellement θ par $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ où (X_1, \dots, X_n) est une statistique et (x_1, \dots, x_n) est la réalisation de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) , c'est décider d'accorder à θ la valeur $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Exemples simples d'estimateurs.

Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire.

On note Θ l'ensemble des θ ; on considère ici que Θ est un intervalle réel. Dans certains cas, qui seront précisés, Θ sera un produit cartésien de deux intervalles réels.

Exemples de n -échantillons associés à une loi de BERNOULLI $\mathcal{B}(1, p)$ avec $\theta = p$.

De façon similaire, si g est une fonction de Θ vers \mathbb{R} , on appelle estimateur de $g(\theta)$ toute variable aléatoire de la forme $T_n = \psi(X_1, \dots, X_n)$ où ψ est une fonction réelle définie sur \mathbb{R}^n . Dans ce cas c'est le nombre $\psi(x_1, \dots, x_n)$ qui fournit la valeur qu'on attribue à $g(\theta)$.

Estimer ponctuellement $g(\theta)$ par $\psi(x_1, \dots, x_n)$ où (X_1, \dots, X_n) est une statistique et (x_1, \dots, x_n) est la réalisation de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) , c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur $\psi(x_1, \dots, x_n)$.

Moyenne arithmétique (dite aussi empirique) de l'échantillon : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Exemples d'estimateurs : estimateur du paramètre p d'une loi de BERNOULLI, estimateur du paramètre λ d'une loi de POISSON.

Biais d'un estimateur : dans le cas où l'estimateur T_n de $g(\theta)$ possède une espérance le nombre réel $\mathbb{E}(T_n) - g(\theta)$ est appelé biais de l'estimateur.

Un estimateur de $g(\theta)$ est dit sans biais quand il admet un biais et que ce biais est nul.

Suite $(T_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs. Chaque T_n est de la forme $T_n = \psi(X_1, \dots, X_n)$.

Estimateur convergent : une suite d'estimateurs de $g(\theta)$ est dite convergente quand elle converge en probabilité vers $g(\theta)$.

Composition par une fonction continue.

Estimateur asymptotiquement sans biais : une suite $(T_n)_{n \geq 1}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ est dite asymptotiquement sans biais quand, quel que soit $\theta \in \Theta$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n) = g(\theta)$.

Comparaison d'estimateurs

Risque quadratique d'un estimateur de $g(\theta)$: dans le cas où l'estimateur T_n de $g(\theta)$ possède un moment d'ordre 2, le réel $\mathbb{E}((T_n - g(\theta))^2)$ est appelé risque quadratique de l'estimateur.

Décomposition biais-variance du risque quadratique d'un estimateur.

Condition suffisante de convergence : si pour tout $\theta \in \Theta$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_\theta(T_n) = 0$, alors la suite d'estimateurs $(T_n)_{n \geq 1}$ de $g(\theta)$ est convergente.

On note $b_\theta(T_n) = \mathbb{E}(T_n) - g(\theta)$.

Remarquer que l'espérance est calculée à partir de la loi L_θ de X , avec θ qui est, pour le moment, un paramètre inconnu. Le biais est donc une fonction de θ .

Dans ce cas, $\mathbb{E}(T_n) = g(\theta)$ pour tout $\theta \in \Theta$.

La fonction ψ dépend de n , on peut utiliser un indice n pour rappeler cette dépendance. En général on omet l'indice afin d'alléger les notations.

Par abus de langage on dit plus simplement que l'estimateur est convergent.

Si $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $g(\theta)$ et si f est une fonction réelle continue sur Θ , alors $(f(T_n))_{n \geq 1}$ est une suite convergente d'estimateurs de $f(g(\theta))$.

Pour comprendre et maîtriser toutes ces définitions il est conseillé de proposer un grand nombre d'exemples simples de problèmes d'estimation paramétrique.

On le note $r_\theta(T_n)$.

Remarquer que l'espérance est calculée à partir de la loi L_θ de X , avec θ qui est, pour le moment, un paramètre inconnu. Le risque quadratique est donc une fonction de θ .

On a $r_\theta(T_n) = (b_\theta(T_n))^2 + v_\theta(T_n)$ où $v_\theta(T_n)$ est la variance de T_n (calculée avec la loi L_θ).

Cette convergence pourra être étudiée à l'aide de l'inégalité de MARKOV.

Des inégalités classiques, comme celle de MARKOV, peuvent être utiles pour étudier cette convergence.

3.4.2 Estimation par intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique

S'il existe des critères pour juger des qualités d'un estimateur ponctuel T_n de $g(\theta)$ (biais, risque, convergence), aucune certitude ne peut jamais être apportée quant au fait que l'estimation donne la vraie valeur à estimer.

La démarche consiste non plus à donner une estimation ponctuelle de $g(\theta)$ à partir d'un estimateur mais à trouver un intervalle aléatoire, appelé intervalle de confiance, qui contienne $g(\theta)$ avec une probabilité minimale donnée. L'utilisation dans certains cas du théorème de la limite centrée impose d'introduire la notion d'intervalle de confiance asymptotique.

Dans tout ce paragraphe $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ désigneront deux suites de statistiques telles que, pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}_\theta(U_n \leq V_n) = 1$.

Intervalle de confiance : on obtient un intervalle de confiance pour $g(\theta)$ de niveau de confiance $1 - \alpha$, α donné dans $]0, 1[$, en donnant deux suites d'estimateurs $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$ telles que, pour tout n , $U_n \leq V_n$ et $\mathbb{P}_\theta(\{U_n \leq g(\theta) \leq V_n\}) \geq 1 - \alpha$.

Les réalisations de U_n et V_n est l'estimation de cet intervalle de confiance ; elles doivent être calculables à partir du seul échantillon (x_1, \dots, x_n) observé.

Intervalle de confiance asymptotique : on appelle intervalle de confiance asymptotique de $g(\theta)$ au niveau de confiance $1 - \alpha$ une suite $([U_n, V_n])_{n \geq 1}$ vérifiant : pour tout $\theta \in \Theta$, il existe une suite de réels $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $[0, 1]$, de limite α , telle que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}_\theta(\{U_n \leq g(\theta) \leq V_n\}) \geq 1 - \alpha_n$.

Intervalle de confiance pour le paramètre d'une loi de BERNOULLI.

Estimation par intervalle de confiance de l'espérance d'une loi admettant un moment d'ordre 2.

α mesure l'incertitude de l'intervalle, $1 - \alpha$ le degré de certitude ou de confiance.

On dit que l'intervalle $[U_n, V_n]$ est intervalle de confiance pour $g(\theta)$ de niveau de confiance $1 - \alpha$.

On distinguera probabilité et confiance et on éclairera ces notions à l'aide de simulations informatiques.

Par abus de langage on dit aussi que $[U_n, V_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique.

On obtiendra ces intervalles de confiance par l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV en majorant $p(1 - p)$ par $\frac{1}{4}$.

On pourra comparer ces intervalles de confiance et les intervalles de confiance asymptotiques obtenus par l'approximation normale de la loi binomiale.

On pourra établir ce résultat dans le cas d'une loi admettant un moment d'ordre 4 : dans ce cas, la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ des écarts-type empiriques converge en probabilité vers l'écart type σ inconnu, ce qui permet d'utiliser le théorème de SLUTSKY pour remplacer σ par T_n afin d'obtenir une estimation par intervalle de confiance asymptotique de l'espérance de la loi.

4 Hors période : travaux pratique de mathématiques avec Scilab

En première année, les élèves ont acquis les bases de manipulation du logiciel Scilab. L'objectif de l'enseignement d'informatique de seconde année ECS est d'utiliser conjointement Scilab et connaissances mathématiques pour modéliser ou illustrer des situations concrètes.

Les heures de travaux pratiques de mathématiques avec Scilab peuvent être organisées de plusieurs façons : certaines séances, notamment celles nécessitant peu de manipulations logicielles de la part des élèves, pourront avoir lieu en classe entière ; les autres séances en groupes réduits de préférence.

Le programme d'informatique s'articule autour de six thèmes :

- statistiques descriptives univariées ;

- statistiques descriptives bivariées ;
- analyse en composantes principales ;
- chaînes de MARKOV ;
- optimisation de fonctions de plusieurs variables réelles ;
- simulation de lois ;
- estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance.

L'ordre dans lequel les thèmes sont abordés est libre, mais il est préférable de mener ces activités en cohérence avec la progression du cours de mathématiques. Certaines notions ou approches mathématiques sont propres à chacun des thèmes, mais ceux-ci peuvent ne pas être étanches entre eux. Ainsi, par exemple, on pourra introduire des méthodes de MONTE-CARLO pour un bon nombre d'entre eux, de manière transversale, sans pour autant que l'on puisse en faire un contenu exigible des candidats.

Dans certains thèmes, il est nécessaire d'introduire de nouvelles notions ou approches mathématiques. celles-ci seront introduites en préambule lors des séances dédiées à l'utilisation de l'outil informatique ; elles ne pourront en aucun cas être exigibles des élèves lors des épreuves d'évaluation ou lors des concours et tout sujet y faisant appel doit proposer des définitions complètes et des résultats précis aux candidats pour les aborder.

Les fonctions et commandes Scilab vues en première année sont exigibles et re-utilisées en seconde année. De nouvelles commandes exigibles sont introduites en seconde année, en fonction du thème traité. Néanmoins, se contenter de ces seules commandes, en ignorant les nombreuses possibilités et commodités du logiciel, se révélerait rapidement contraignant et limitatif. D'autres commandes Scilab peuvent donc être introduites, mais cela devra se faire avec parcimonie, l'objectif principal de l'activité informatique reste la mise en pratique des connaissances mathématiques. Les commandes introduites devront être présentées en préambule et toutes les précisions nécessaires seront données pour une utilisation efficace. On favorisera à cette occasion l'autonomie et la prise d'initiatives en conseillant aux élèves la consultation de l'aide Scilab.

L'objectif de ces travaux pratiques n'est pas l'écriture de longs programmes mais l'assimilation de savoir-faire et de compétences spécifiés dans la liste des exigibles et rappelés en préambule de chaque thème.

Les exemples traités dans un thème devront être tirés, autant que possible, de situations réelles proposant des données économiques, sociologiques, historiques, démographiques, en lien avec le monde de l'entreprise ou de la finance. Le rapprochement avec les autres disciplines est souhaité.

4.1 Liste de compétences exigibles

1. Produire et interpréter des résumés numériques et graphiques d'une série statistique simple ou double, d'une loi.
2. Modéliser et simuler des phénomènes aléatoires ou déterministes.
3. Représenter et exploiter le graphe d'une fonction de n variables réelles ($1 \leq n \leq 3$).
4. Représenter et interpréter différents types de convergence.
5. Utiliser la méthode de MONTE-CARLO.
6. Mettre en place des méthodes d'estimation et juger de leur pertinence.

4.2 Liste des commandes Scilab

Toutes les commandes du programme de première année ECS sont exigibles. La connaissance des nouvelles commandes suivantes ainsi que de leurs arguments est aussi exigible des élèves :

sum, cumsum, mean, median, stdeviation, corr, max, cdfnor, zeros, ones, eye, spec.

En revanche, les commandes suivantes devront avoir été manipulées par les élèves mais la connaissance détaillée de leurs arguments n'est pas exigible lors des concours :

plot2d, fplot2d, plot3d, fplot3d, param3d.

4.3 Liste des thèmes, commandes supplémentaires pouvant être utilisés

4.3.1 Statistique univariée

Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : 1 et 6

Dans ce paragraphe, on analysera des données statistiques issues de l'économie, du monde de l'entreprise ou de la finance, en insistant sur les représentations graphiques. On insistera sur le rôle des différents indicateurs de position et de dispersion étudiés.

Série statistique associée à un échantillon.

Effectifs, fréquences, fréquences cumulées, diagrammes en bâtons, histogrammes.

Indicateurs de position : moyenne, médiane, mode, quantiles.

Indicateurs de dispersion : étendue, variance et écart-type empiriques, écart inter-quantile.

On pourra également utiliser les commandes : dsearch, tabul, pie.

4.3.2 Statistique bivariée

Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : 1 et 6

Série statistique à deux variables, nuage de points associé. Point moyen (\bar{x}, \bar{y}) du nuage.

Covariance empirique, coefficient de corrélation empirique, droites de régression.

On tracera le nuage de points et les droites de régression et on pourra effectuer des pré-transformations pour se ramener au cas linéaire.

On différenciera les variables explicatives des variables à expliquer.

4.3.3 Analyse en composantes principales

Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : 2 et 4

Ce thème sera l'occasion d'appliquer les résultats du cours d'algèbre bilinéaire.

Nuage de points de \mathbb{R}^3 , centre de gravité, nuage centré, matrice de covariance, inertie du nuage, inertie par rapport à un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Étude d'exemples simples, représentation du nuage grâce à la commande param3d, visualisation du plan de meilleure approximation et interprétation.

Calcul de la matrice de covariance, de ses valeurs propres et d'une base orthonormée de vecteurs propres. Axes principaux du nuage. Calcul de l'inertie par rapport à une droite ou un plan vectoriel. Extension au cas de \mathbb{R}^n .

4.3.4 Chaînes de MARKOV

Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : 2 et 4

Ce thème donnera aux élèves l'occasion de revoir les simulations de lois discrètes étudiées en première année et d'appliquer les résultats et techniques d'algèbre linéaire.

Matrice de transition. Comportement limite. Étude sur des exemples simples.

On pourra étudier l'indice de popularité d'une page Web (PageRank), modéliser l'évolution d'une société (passage d'individus d'une classe sociale à une autre), ou les systèmes de bonus-malus en assurances. Simulation et mise en évidence d'états stables avec la commande `grand(n,'markov', M, a)`.

4.3.5 Fonctions de plusieurs variables réelles

Durée indicative : 3 heures. Compétences développées : 2 et 3

Graphes et positions relatives de graphes, représentation du gradient, extremums locaux et globaux, cas de contraintes.

Grappe d'une fonction de deux variables, lignes de niveau, plan affine tangent au graphe. Dérivées partielles et dérivées directionnelles, représentation du gradient.

Position du graphe par rapport au plan affine tangent au graphe, lien avec les valeurs propres de la matrice hessienne, points selles.

Étude d'extrema locaux et globaux. Extrema sous contraintes.

À cette occasion, on pourra mettre en évidence l'orthogonalité du gradient avec les courbes de niveau d'une fonction à deux variables.

Programmation de fonctions variées permettant de mettre en évidence les notions d'extrema locaux ou globaux, avec ou sans contrainte. On pourra prendre des exemples issus de l'économie ou de la finance : minimisation du risque, maximisation du gain, etc.

4.3.6 Simulation de lois

Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : 1, 2, 3 et 6

Dans toutes les simulations effectuées, on pourra comparer les échantillons obtenus avec les distributions théoriques, en utilisant des diagrammes en bâtons et des histogrammes. On pourra aussi tracer la fonction de répartition empirique à l'aide des commandes `gsort` et `plot2d2` et la comparer à la fonction de répartition théorique.

Méthode d'inversion.

Application de la méthode d'inversion pour la simulation par exemple des lois exponentielle ou de CAUCHY. On pourra mettre en évidence, grâce aux simulations, qu'une variable aléatoire suivant une loi de CAUCHY n'admet pas d'espérance.

Méthodes de simulation d'une loi géométrique.

Comparaison entre différentes méthodes : utilisation d'une loi de Bernoulli et d'une boucle while, utilisation d'une loi exponentielle et de la fonction floor, utilisation du générateur grand.

Simulations informatiques d'une loi normale par utilisation du théorème de la limite centrée appliqué à différentes lois.

Comparaison entre différentes méthodes de simulation d'une loi normale.

On pourra s'intéresser au cas particulier de 12 variables aléatoires indépendantes suivant une même loi uniforme.

Simulations de variables aléatoires discrètes et à densité variées.

On pourra faire le lien entre les lois exponentielles, les lois et de POISSON en modélisant des temps d'attente.

4.3.7 Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance

Durée indicative : 6 heures. Compétences développées : 2, 4, 5 et 6

Méthode de MONTE-CARLO : principe, garanties d'approximation.

Cette méthode permet d'estimer des quantités qu'il est parfois difficile de calculer explicitement mais qu'il est facile d'approcher par simulation (probabilités d'événements, espérances de variables aléatoires, calculs d'intégrales, etc.).

Ainsi, on pourra estimer par exemple les valeurs prises par la fonction de répartition de la somme ou du produit de deux variables aléatoires, ou encore, estimer le niveau réel, à rang n fini, d'intervalles de confiance asymptotiques.

Comparaison de différents estimateurs ponctuels d'un paramètre.

On pourra utiliser des données issues de situations réelles, par simple comparaison de valeurs numériques, ou créer plusieurs jeux de données par simulation grâce à la commande grand. Dans ce dernier cas, on pourra comparer les lois des estimateurs par exemple à l'aide d'histogrammes.

Comparaison des intervalles de confiance d'un paramètre obtenus par différentes méthodes.

Estimation par intervalle de confiance du paramètre d'une loi de BERNOULLI et de l'espérance d'une loi normale.

La comparaison pourra se faire en calculant les demi-largeurs moyennes des intervalles et leurs niveaux de confiance.

Table des matières

1	Préambule	1
1.1	Objectifs généraux de formation	1
1.2	Organisation du texte du programme	2
1.3	Contenu du programme	2
1.4	Organisation temporelle de la formation	3
1.5	Recommandations pédagogiques	4
2	Première période	5
2.1	Algèbre linéaire et bilinéaire	5
2.1.1	Compléments d'algèbre linéaire	5
2.1.2	Algèbre bilinéaire	6
2.2	Fonctions réelles de n variables réelles	7
2.2.1	Introduction aux fonctions définies sur \mathbb{R}^n	7
2.2.2	Calcul différentiel	8
2.3	Compléments de probabilités ; couples et n -uplets de variables aléatoires réelles	8
2.3.1	Compléments d'analyse	9
2.3.2	Généralités sur les variables aléatoires réelles	9
2.3.3	Couples de variables aléatoires	10
2.3.4	Espérance de variables aléatoires réelles	11
2.3.5	Vecteur aléatoire réel	13
3	Seconde période	15
3.1	Compléments d'algèbre bilinéaire	15
3.1.1	Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien, matrices symétriques	15
3.1.2	Projection orthogonale	15
3.1.3	Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques	15
3.2	Fonctions réelles de n variables réelles ; recherche d'extremums	16
3.2.1	Notion de fonction réelle définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^n	16
3.2.2	Fonctions de classe \mathcal{C}^2	16
3.2.3	Recherche d'extremums	17
3.2.4	Recherche d'extremums sous une contrainte de classe \mathcal{C}^1	18
3.2.5	Recherche d'extremums sous contrainte d'égalités linéaires	18
3.3	Convergence d'une suite de variables aléatoires	19
3.3.1	Inégalité de MARKOV, inégalité de BIENAYMÉ-TSCHEBYCHEV	19
3.3.2	Convergence en probabilité	19

3.3.3	Convergence en loi	20
3.4	Estimation	20
3.4.1	Estimation ponctuelle	21
3.4.2	Estimation par intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique . . .	22
4	Hors période : travaux pratique de mathématiques avec Scilab	23
4.1	Liste de compétences exigibles	24
4.2	Liste des commandes Scilab	25
4.3	Liste des thèmes, commandes supplémentaires pouvant être utilisées	25
4.3.1	Statistique univariée	25
4.3.2	Statistique bivariée	25
4.3.3	Analyse en composantes principales	25
4.3.4	Chaînes de MARKOV	26
4.3.5	Fonctions de plusieurs variables réelles	26
4.3.6	Simulation de lois	26
4.3.7	Estimation ponctuelle et par intervalle de confiance	27