Espaces vectoriels normés
Partie 2
Résumé Lacunaire

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F deux evn.

Pour alléger, $\| \ \|$ désignera la norme dans E et dans F

1) Limite et Continuité en un point

Déf

Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$. Soient $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \iff (\forall$ [redacted] $)$

Déf

Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$. Soit $a \in A$

1) f est dite continue en a si et ssi $\lim\limits_{x\to a}$ [redacted]

2) f est dite continue sur A si et ssi elle est continue [redacted]

Prop (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$. Soient $a \in \bar{A}$ et $l \in F$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

2) (Pour toute suite $(x_n)_n$ à valeurs [redacted].
Si [redacted] alors $\lim\limits_{n\to+\infty}$ [redacted])

Corollaire (Caractérisation séquentielle de la Continuité)

Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$. Soit $a \in A$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue en a.

2) Pour toute suite $(x_n)_n$ à valeurs [redacted]

Si $\lim\limits_{n \to +\infty}$ [redacted] alors $\lim\limits_{n \to +\infty}$ [redacted]

NB 1

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (x_n) et (y_n) tendant vers a, alors que leurs suites images $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ [redacted]

NB 2

Pour montrer que f n'est pas continue en a il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ tendant vers a alors que sa suite image $(f(x_n))_n$ [redacted]

2) Continuité Uniforme

Déf Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$.

f est dite uniformément continue sur A si et ssi :

$\forall \varepsilon$ [redacted]

Prop

$\left(f \text{ est uniformément continue sur } A\right) \Longrightarrow \left(f \text{ est}\right.$ [redacted] $\left.\text{sur } A\right)$

Déf (Fonction lipschitzienne)

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$.

f est dite **lipschitzienne** sur A si et ssi :

$\exists k \geq 0,$ [redacted]

Prop

$\left(f \text{ est lipschitzienne sur } A\right) \Longrightarrow \left(f \text{ est}\right.$ [redacted] $\left.\text{sur } A\right)$

3) Continuité et densité

Prop

Soient f et $g \in \mathcal{F}(E, F)$; où E et F deux evn.

Soit D une partie [redacted] sur E. On a :

1) $(f = g \text{ sur } E) \Longleftrightarrow (f = g \text{ sur } D)$

2) $(f = 0 \text{ sur } E) \Longleftrightarrow (f = 0 \text{ sur } D)$

4) Extensions de la notion de limite

E et F deux evn.

Déf

$f : A \subset E \to F$ et $l \in F$.

$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = l \iff (\forall$ [redacted]

Déf

$f : A \subset \mathbb{R} \to F$ et $l \in F$.

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff ($ [redacted]

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff ($ [redacted]

Déf

$f : A \subset E \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$.

1) $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff ($ [redacted]

2) $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff ($ [redacted]

5) Fonction à valeurs dans un produit cartésien d'evn

Ici
- E evn et $A \subset E$.
- $E_1, \dots, E_s$ des evn.
- $f : A \subset E \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_s$; $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_s(x))$

Vocabulaire

$f_1, \dots, f_s$ sont les fonctions composantes de f.

Prop

Soient $a \in \overline{A}$ et $l = (l_1, \dots, l_s) \in E_1 \times \dots \times E_s$. On a :

$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff (\forall 1 \leq i \leq s,$ [redacted]

Corollaire

Soit $a \in A$. On a

1) f continue en a $\Longleftrightarrow$ (Toutes ses fonctions composantes [redacted])

2) f continue sur A $\Longleftrightarrow$ (Toutes ses fonctions composantes [redacted])

6) Opérations sur les limites et sur les fonctions continues

Prop

f et g : $A \subset E \longrightarrow F$, $a \in \bar{A}$, $(l, L) \in F^2$. On a :

1) $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \lim\limits_{x \to a}\right.$ [redacted] $\left. = \alpha l + \beta L\right)$

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a}$ [redacted] $= \|l\|$

Corollaire

Soient f, g : $A \subset E \longrightarrow F$ et $a \in A$.

1) Si (f et g sont continues en a) alors $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha f + \beta g)$ est [redacted]

2) Si (f et g sont continues sur A) alors $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha f + \beta g)$ est [redacted]

Prop

Soient f : $A \subset E \longrightarrow F$ et w : $A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$.

Soient $a \in \bar{A}$, $l \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a :

1) $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to a} w(x) = \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a}$ [redacted] $= \alpha l$

2) Si f et w sont continues sur A alors [redacted]

Corollaire

E un evn de dimension finie et B une base de E.

Toute fonction définie sur E, polynomiale en les coordonnées dans la base B est [redacted]

Prop (Composée)

E, F et G trois evn.

Soient $f : A \subset E \to F$ et $g : B \subset F \to G$, avec $f(A) \subset B$.

1) Soient $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$ et $l \in G$.

Si $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = l \end{pmatrix}$ alors $\lim\limits_{x \to a}$ [redacted] $= l$

2) Soit $a \in A$.

Si (f continue en [redacted] / g continue en [redacted]) alors ($g \circ f$ est continue en a)

3) Si (f continue sur [redacted] / g continue sur [redacted]) alors ($g \circ f$ est continue sur A)

Corollaire

Soient f et $g : A \subset E \to \mathbb{K}$

1) Si ([redacted] sur A / [redacted] sur A) alors $\left(\frac{1}{f} \text{ est continue sur } A \right)$

2) Si (f et g [redacted] sur A / f [redacted] sur A) alors $\left(\frac{g}{f} \text{ est continue sur } A \right)$

7) Fonction à but dans un evn de dimension finie

$f : A \subset E \longrightarrow F$, où E et F deux evn.
F est de dimension finie $s \geq 1$ et $B = (e_1, \dots, e_s)$ une base de F.
f s'écrit sous la forme : $f = f_1 e_1 + \dots + f_s e_s = \sum_{i=1}^{s} f_i e_i$.
Pour chaque $i \in [\![1, s]\!]$, $f_i : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$.

Vocabulaire

$f_1, \dots, f_s$ s'appellent les fonctions composantes de f dans la base B.

Prop

Soient $a \in \bar{A}$ et $l = \sum_{i=1}^{s} l_i e_i \in F$. On a :

$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \Big(\forall 1 \leq i \leq s, \lim_{x \to a}$ [redacted]

Corollaire

1) Soit $a \in A$.

$\big(f$ continue en $a \big) \iff \big($ Toutes ses fonctions composantes dans la base B sont [redacted] $\big)$

2) $\big(f$ continue sur $A \big) \iff \big($ Toutes ses fonctions composantes dans la base B sont [redacted] $\big)$

8) Image réciproque d'un ouvert et d'un fermé par une application continue

Prop

Soient E et F deux evn et $f : E \longrightarrow F$ [redacted] sur E.

1) L'image réciproque d'un ouvert de F est un [redacted]

2) L'image réciproque d'un fermé de F est un [redacted]

Autrement dit

1) Si $\begin{pmatrix} \theta \text{ ouvert de } F \\ f \text{ [redacted] sur } E \end{pmatrix}$ alors $\big(f^{-1}(\theta)$ est un [redacted] de $E \big)$

2) Si $\begin{pmatrix} H \text{ fermé de } F \\ f \text{ [redacted] sur } E \end{pmatrix}$ alors $\left(f^{-1}(H) \text{ est un [redacted] de } E\right)$

9) Applications linéaires continues

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F deux evn.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

!!

1) f est continue sur E

2) f est continue [redacted]

3) $\exists C>0,\ \forall x \in E,$ [redacted] $\leq$ [redacted]

Corollaire

Si $\begin{pmatrix} f \in \mathcal{L}(E,F) \\ \text{[redacted] de dimension finie} \end{pmatrix}$ alors (f est [redacted] sur E)

10) Continuité des applications multilinéaires

Prop

Soient E, F et G trois evn.

Soit $f : E\times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue sur $E\times F$

2) $\exists C>0,\ \forall (x,y) \in E\times F,$ [redacted]

En général, on a :

Prop

Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des evn.

Soit $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application n_linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue sur $E_1 \times \dots \times E_n$

2) $\exists C > 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n,$ [redacted]

Prop

Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des evn.

Si

1) $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application n_linéaire

2) [redacted] de dimensions finies

alors f est [redacted] sur $E_1 \times \dots \times E_n$

Cas particulier fréquent

Si E et F sont deux evn de dimensions finies alors toute application bilinéaire sur $E \times F$ est [redacted]

II) Compacité et Continuité

Prop

Soit $f : E \to F$ où E et F deux evn.

Si (K compact de E ; f [redacted] sur K) alors ($f(K)$ est un compact de F)

Prop (Cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$)

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ où E evn.

Si $\begin{pmatrix} K \text{ Compact de } E \\ f \text{ continue sur } K \end{pmatrix}$ alors (f est [redacted] sur K et [redacted])

Prop (Théorème de Heine)

Soit $f : E \to F$ où E et F deux evn.

Soit K un [redacted] de E. On a :

$(f \text{ Continue sur } K) \iff$ (f [redacted] sur K)

12) Les Compacts en dimension finie

Prop

Soit E un evn de dimension finie.

Soit $K \subset E$. On a :

$$\boxed{K \text{ Compact} \iff K \text{ est [redacted]}}$$

Prop

Soit E un evn de dimension finie.

1) Toute suite bornée admet au moins une sous-suite [redacted]

2) Autrement dit :

Toute suite bornée admet au moins une [redacted]

Prop

Soit E un evn de dimension finie.

Une suite bornée est convergente si et ssi elle possède une unique [redacted]

13) Fermeture d'un sev de dimension finie

Prop

Soit E un evn de dimension quelconque.

Tout sev [redacted] de E est fermé.

14) Parties connexes par arcs

A sera une partie non vide de l'evn E.

Soient x et $y \in A$.

$\boxed{x \text{ et } y \text{ sont joignables par un arc inscrit dans } A}$ si et ssi

Il existe un segment $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ et une application $\gamma : [\alpha, \beta] \to E$ vérifiant :

1) $\gamma(\alpha) =$ [redacted] et $\gamma(\beta) =$ [redacted]
2) γ continue sur $[\alpha, \beta]$
3) $\gamma([\alpha, \beta])$ [redacted]

Prop

Si $\left(\begin{array}{l} x \text{ et } y \text{ sont joignables par un arc inscrit dans } A \\ y \text{ et } z \text{ sont joignables par un arc inscrit dans } A \end{array} \right)$

Alors ([redacted])

Déf La partie A est dite [redacted] si et ssi pour tout $x, y \in A$, x et y sont joignables par un arc inscrit dans A.

Prop

A convexe [redacted] A connexe par arcs

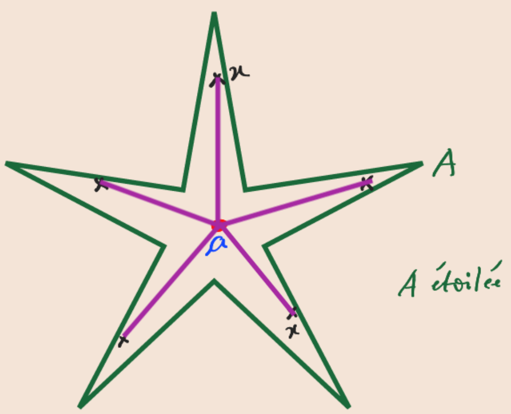
Prop Dans l'evn $\mathbb{R}$, on a :

(A convexe) [redacted] (A intervalle) [redacted] (A connexe par arcs)

Déf

A est dite partie étoilée de E, si et ssi :

$\exists a \in A,$ [redacted]



Prop

A étoilée [redacted] A connexe par arcs

Prop

Si $\left(\begin{array}{l} A \text{ connexe par arcs} \\ f \text{ [redacted]} \end{array} \right)$ Alors ($f(A)$ est connexe par arcs)

Fin