Fonctions à paramètre Classiques

Exercice (Transformée de Laplace)
$L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$ désignera l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit $f \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$. On appelle *transformée de Laplace* de f l'application $L(f)$ définie par

$$\forall x>0,\ L(f)(x)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$$

1) Vérifier que si $f \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$, $L(f)$ est bien définie sur $]0,+\infty[$.
2) Montrer que
   i) Pour $f(t)=1$, $L(f)(x)=\frac{1}{x}$.
   ii) Pour $f(t)=\sin(\omega t)$, où $\omega\in\mathbb{R}$, $L(f)(x)=\frac{\omega}{x^2+\omega^2}$.
3) Montrer que L est une application linéaire de $L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$ vers $\mathcal{C}(]0,+\infty[,\mathbb{C})$.
4) Soit $f\in\mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{C})$ telle que f et f' soient bornées.
   Montrer que
   $$\forall x>0,\ L(f')(x)=xL(f)(x)-f(0)$$
5) Soit $f \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$. Montrer que
   $$\lim_{x\to+\infty} xL(f)(x)=f(0)$$
   Indication : Vous pouvez utiliser un changement de variable.
6) Soit $f \in L^\infty([0,+\infty[,\mathbb{C})$.
   Supposons en plus que f possède une limite finie L en $+\infty$.
   Montrer que
   $$\lim_{x\to 0} xL(f)(x)=L$$