ÉCOLE POLYTECHNIQUE **ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES**

CONCOURS D'ADMISSION 2017 **FILIÈRE MP**

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES – A – (XLCR)

(Duré: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

EXTRAIT

Dans tout le problème

- E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$,
- Id est l'application identité sur E: $\mathrm{Id}(x) = x$ pour tout $x \in E$,
- $\mathrm{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E,
- $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des automorphismes de E,
- $E^* = \mathrm{L}(E, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E,
- $\mathrm{A}(E)$ est l'espace vectoriel des applications $\omega : E \times E \to \mathbb{R}$ qui sont bilinéaires et anti-symétriques, c'est-à-dire qui vérifient, quel que soit $(x, y, z) \in E^3$ et quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\omega(\lambda x + y, z) = \lambda\omega(x, z) + \omega(y, z)\,, \qquad \omega(x, \lambda y + z) = \lambda\omega(x, y) + \omega(x, z)\,,$$

$$\omega(x, y) = -\omega(y, x)\,.$$

Pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et $x \in E$, on note $\omega(x, \cdot)$ la forme linéaire définie par

$$\left|\begin{array}{llll} \omega(x,\cdot): & E & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \omega(x,y) \end{array}\right.$$

Pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$, on note φ_ω l'application linéaire définie par

$$\left|\begin{array}{llll} \varphi_\omega: & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & \omega(x,\cdot) \end{array}\right.$$

Un élément ω de $\mathrm{A}(E)$ est appelé **forme symplectique sur** E si φ_ω est un isomorphisme de E sur E^*.
Un élément J de $\mathrm{L}(E)$ est appelé **structure complexe sur** E s'il vérifie $J^2 = -\mathrm{Id}$.
On dit qu'une forme symplectique ω sur E **dompte** une structure complexe J si $\omega(x, J(x)) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

On note

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients réels,
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de taille n à coefficients réels,
- I_n la matrice unité de taille n,
- lorsque n est pair, J_n la matrice carrée de taille n définie par blocs

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & -I_{\frac{n}{2}} \\ I_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

• det l'application déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
• ${}^tM$ la transposée de la matrice M.
On identifie tout élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ à un nombre réel.

La partie I est utilisée dans les parties III et IV. Les parties II et III indépendantes entre elles, sont utilisées dans la partie IV.

Partie I: Bases symplectiques

1. Montrer que la dimension de l'espace vectoriel E^* vaut n.

2. Montrer que $\omega(x,x) = 0$ pour tout $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et pour tout $x \in E$.

3. Soit $\omega \in \mathrm{A}(E)$ et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.

   (a) Montrer qu'il existe une unique matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on précisera les coefficients, telle que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\omega(x,y) = {}^tXMY$ où $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sont les matrices colonnes représentant respectivement x et y dans la base $\mathcal{B}$:

   $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n \, , \\ \\ y = y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n \, . \end{array}$$

   On notera alors $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$.

   (b) Montrer que M est antisymétrique, c'est-à-dire que ${}^tM = -M$.

   (c) Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{A}(E)$ est de dimension 1 lorsque E est de dimension 2.

   (d) Montrer l'équivalence entre les trois énoncés suivants.
   ($\mathcal{E}_1$): ω est une forme symplectique sur E.
   ($\mathcal{E}_2$): Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $y \in E$ tel que $\omega(x,y) \neq 0$.
   ($\mathcal{E}_3$): $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega)$ est inversible.

4. Montrer que, s'il existe une forme symplectique sur E, alors E est de dimension paire.

   Dorénavant, jusqu'à la fin du problème, n ***est un entier pair*** $\geqslant 2$.

5. Montrer que l'application ω_0 définie par

   $$\begin{array}{rccc} \omega_0 : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & {}^tXJ_nY \end{array}$$

   est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

   Jusqu'à la fin de cette partie, on fixe une forme symplectique ω ***sur*** E.

   Le but des questions 6 à 9 est de montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ ***de*** E ***telle que*** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\omega) = J_n$.

6. Traiter le cas où E est de dimension 2.

7. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

(a) Montrer que, pour toute forme linéaire $u : F \to \mathbb{R}$, il existe une forme linéaire $\widetilde{u} : E \to \mathbb{R}$ dont la restriction à F coïncide avec u.

On note F^ω le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^\omega = \{x \in E \, : \, \forall y \in F, \, \omega(x,y) = 0\}$$

et ψ_F l'application linéaire définie par

$$\left| \begin{array}{rccc} \psi_F : & E & \to & F^* \\ & x & \mapsto & \varphi_\omega(x)|_F \end{array} \right.$$

où $\varphi_\omega(x)|_F$ est la restriction de $\varphi_\omega(x)$ à F.

(b) Montrer que la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F si et seulement si $F \cap F^\omega = \{0\}$.

(c) Quels sont le noyau et l'image de ψ_F?

(d) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\omega) = \dim(E)$.

(e) Montrer que, si la restriction de ω à $F \times F$ est une forme symplectique sur F, alors $E = F \oplus F^\omega$ et la restriction de ω à $F^\omega \times F^\omega$ est une forme symplectique sur F^ω.

8. Montrer par récurrence qu'il existe une base $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\mathcal{B}}}(\omega) = \begin{pmatrix} J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

9. Conclure. En déduire que ω dompte au moins une structure complexe sur E.

Partie II: Deux outils sur les polynômes

On note $\mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant d$ à coefficients réels, pour tout $d \in \mathbb{N}$.

10. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ des polynômes non nuls de degrés respectifs p et q strictement positifs. Montrer que l'application linéaire $L_{P,Q}$ définie par

$$\left| \begin{array}{rccc} L_{P,Q} : & \mathbb{R}_{q-1}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] & \to & \mathbb{R}_{p+q-1}[X] \\ & (V,W) & \mapsto & VP + WQ \end{array} \right.$$

est un isomorphisme si et seulement si P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

11. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Construire une application

$$\left| \begin{array}{rccc} r : & \mathbb{R}_d[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & r(P) \end{array} \right.$$

polynomiale en les coefficients de P, telle que, si $r(P)$ est non nul, alors les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.
Indication: On pourra utiliser la question précédente.