

المملكة المغربية

CNC 2013

Mathématiques 2

AQALMOUN MOHAMED agrégé de mathématiques MPSI CPGE Khouribga

Énoncé

Le sujet de cette épreuve est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Premier exercice**Matrice de Gram et application**

Soient u_1, \dots, u_n des vecteurs de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$; on note $G(u_1, \dots, u_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\langle u_i, u_j \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n . La matrice $G(u_1, \dots, u_n)$ est dite la matrice de Gram.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n et, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on note $u_j = \sum_{k=1}^n m_{k,j} e_k$ l'expression du vecteur u_j dans la base \mathcal{B} . on désigne enfin par M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $m_{i,j}$.

1. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, exprimer le produit scalaire $\langle u_i, u_j \rangle$, à l'aide des coefficients de la matrice M et en déduire que $G(u_1, \dots, u_n) = {}^t M M$.
2. Montrer que la matrice $G(u_1, \dots, u_n)$ est symétrique et positive, et que si la famille (u_1, \dots, u_n) est libre alors la matrice $G(u_1, \dots, u_n)$ est définie positive.
3. On note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = \min(i, j)$.
 - (a) Exprimer A_n comme matrice de Gram et en déduire qu'elle est symétrique définie positive, puis expliciter une matrice $R_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure, telle que $A_n = {}^t R_n R_n$.
 - (b) On prend $n = 4$ et note X , (resp. Y , resp. Z) le vecteur de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ de composantes x_1, x_2, x_3 et x_4 (resp. $1, 2, 3$ et 4 , resp. z_1, z_2, z_3 et z_4). Résoudre les systèmes linéaires ${}^t R_4 Z = Y$ et $R_4 X = Z$ puis en déduire la solution du système $A_4 X = Y$.

Deuxième exercice**Résolution de l'équation $X^2 + 3X = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$**

On note u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de A et on suppose que $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.
2. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, déterminer le vecteur propre e_k de u associé à la valeur propre λ_k et ayant pour composantes des nombres entiers dont l'un est égal à 1.

3. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base.
4. Déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$ puis calculer P^{-1} .
5. Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $B^2 + 3B = A$; on note v l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à B .
 - (a) Justifier que $v^2 + 3v = u$.
 - (b) Vérifier que $uv = vu$ et en déduire que, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, le vecteur $v(e_k)$ est colinéaire à e_k , conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale.
 - (c) On pose $V = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Expliciter Δ en fonction de V puis déterminer les valeurs possibles de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ainsi que celle de la matrice B . La relation $B^2 + 3B = A$ est équivalente à $V^2 + 3V = \Delta$.
Et cette dernière relation est équivalente à $\alpha_1^2 + 3\alpha_1 = 10, \alpha_2^2 + 3\alpha_2 = 4$ et $\alpha_3^2 + 3\alpha_3 = 0$, après la résolution de ces équations, on obtient $\alpha_1 = -5$ ou $2, \alpha_2 = -4$ ou 1 , et $\alpha_3 = 0$ ou -3 .
 - (d) Combien de solutions l'équation $X^2 + 3X = A$ admet-elle dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Problème

Dans ce problème, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des applications de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et \mathcal{D} l'opérateur de dérivation défini sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ par : $\mathcal{D}(f) = f'$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; de même, $\mathbb{C}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes à une indéterminée et D l'opérateur de dérivation défini sur cet espace vectoriel par : $D(P) = P'$, $P \in \mathbb{C}[X]$.

On rappelle que \mathcal{D} et D sont des endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement.

Si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ est un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$, on lui associe l'équation différentielle homogène noté \mathcal{E}_P suivante :

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (\mathcal{E}_P)$$

Par "solution la solution de l'équation différentielle (\mathcal{E}_P)" on fait référence à toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ n -fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_n f^{(n)}(x) + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0.$$

Comme $a_n \neq 0$, il est évident que toute solution de \mathcal{E}_P est un élément de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. L'ensemble des solutions est donc un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

La troisième partie du problème utilise les résultats de l'avant dernière question de la seconde partie; la deuxième partie utilise les résultats de la première.

Première partie Résultats préliminaires

- 1.1. Soit n un entier naturel quelconque; on note $\mathbb{C}_n[X]$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ formé des polynômes de degré $\leq n$.

- 1.1.1. Montrer que $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par l'endomorphisme D .

Dans la suite on note D_n l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{C}_n[X]$ et I_n l'application identité de $\mathbb{C}_n[X]$ définie par : $I_n(P) = P, P \in \mathbb{C}_n[X]$.

- 1.1.2. Montrer que l'endomorphisme D_n est nilpotent.
- 1.1.3. Montrer que, pour tout complexe non nul α , l'endomorphisme $D_n + \alpha I_n$ est inversible et exprimer son inverse à l'aide des puissances de α et D_n .
- 1.2. Dédire de ce qui précède que si α est un complexe non nul et $R \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique polynôme $R_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $R'_1 + \alpha R_1 = R$; vérifier que R_1 est de degré n et l'exprimer en fonction de R .
- 1.3. Soit λ un nombre complexe et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.
 - 1.3.1. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $x \mapsto G(x)e^{-\lambda x}$ où G est une primitive de la fonction $s \mapsto g(s)e^{-\lambda s}$.
 - 1.3.2. Dans cette question, on pose $g(x) = R(x)e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, où R est un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$, où S est un polynôme à coefficients complexes dont le polynôme dérivé est égal à R .
 - 1.3.3. Dans cette question, on pose $g(x) = R(x)e^{\mu x}$, $x \in \mathbb{R}$, où μ désigne un complexe distinct de λ et R est un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' - \lambda y = g$ sont de la forme $x \mapsto R_1(x)e^{\mu x} + ce^{\lambda x}$ où R_1 est l'unique polynôme à coefficients complexes vérifiant $R'_1 = (\mu - \lambda)R_1 = R$ et c est un paramètre complexe.

Deuxième partie

Expression des solutions de l'équation différentielle (\mathcal{E}_P)

- 2.1. **Cas où $P = (X - \lambda)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$**
 Montrer que dans ce cas, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_P si, et seulement si, il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $f(x) = R(x)e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$. On pourra calculer la dérivée n -ième de la de la fonction $h : x \mapsto e^{-\lambda x} f(x)$.
- 2.2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul ; on pose $P = (X - \lambda)Q$.
 - 2.2.1. Montrer que les deux endomorphismes $Q(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D} - \lambda I)$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, commutent ; I désigne l'application identité du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
 - 2.2.2. En déduire que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_P si, et seulement si, $P(\mathcal{D})(f) = 0$ si, et seulement si, $f' - \lambda f$ est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_Q .
- 2.3. En faisant un raisonnement par récurrence, retrouver le résultat de la question 2.1. ci-dessus sans savoir recours à un calcul de la dérivée n -ième.
- 2.4 **Un exemple :** Déterminer les entiers qui sont racines du polynôme $P_1 = (X - 1)(X + 1)^3$ puis le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$; donner l'expression des solutions de l'équation différentielle \mathcal{E}_{P_1} .
- 2.5 **Cas général :** On suppose ici que le polynôme s'écrit $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$, où r est un entier ≥ 2 , $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des complexes deux à deux distincts, et m_1, \dots, m_r des entiers naturels non nuls
 En faisant un raisonnement par récurrence sur le degré de P , montrer que les solutions de l'équation différentielle \mathcal{E}_P sont les fonctions de la forme $x \mapsto \sum_{k=1}^r R_k(x)e^{\lambda_k x}$, où $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$. On pourra exploiter le résultat de la question 2.2.2.. Pour $n = 2$.

- 2.6. Montrer en précisant l'énoncé du théorème utilisé, que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, les solutions de l'équation différentielle \mathcal{E}_P ont toujours la forme des solutions trouvées dans la question 2.5. précédente. Quelle est alors la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel des solutions de \mathcal{E}_P ?
- 2.7. **Un autre exemple :** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle \mathcal{E}_{P_2} où $P_2 = X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1$, sachant que 1 est racine triple de P_2 .

Troisième partie Un résultat de finitude

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable ; pour tout réel τ , on désigne par f_τ la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} définie par $f_\tau(x) = f(x + \tau)$, $x \in \mathbb{R}$; on note $E_f = \text{Vect}(\{f_\tau ; \tau \in \mathbb{R}\})$ le sous espace vectoriel complexe de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ engendré par les fonctions f_τ lorsque τ décrit \mathbb{R} .

On se propose dans cette partie de caractériser f pour que E_f soit de dimension finie. On suppose donc que E_f est de dimension finie $p \geq 1$ et on note $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une base de E_f .

- 3.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n} + x) - f(x))$, $x \in \mathbb{R}$.

- 3.1.1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n \in E_f$ et justifier qu'il existe des complexes $\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{p,n}$ tels que $g_n = \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n} \varphi_k$ (1)

$$g_n = \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n} \varphi_k \quad (1)$$

- 3.1.2. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers f' .

- 3.2. Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ et tout k -uplet (x_1, \dots, x_k) de réels, on note $\Delta_k(x_1, \dots, x_k)$ la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ "doit être dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$?" de terme général $\varphi_j(x_i)$, $(i, j) \in \{1, \dots, k\}^2$ (coefficient de la i -ième ligne et la j -ième colonne), et désigne par $\delta_k(x_1, \dots, x_k)$ le déterminant de la matrice $\Delta_k(x_1, \dots, x_k)$.

On cherche ici qu'il existe $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $\delta_k(a_1, \dots, a_k) \neq 0$. On va établir l'existence des a_k , $1 \leq k \leq p$, par récurrence.

On choisit donc $a_1 \in \mathbb{R}$, tel que $\varphi_1(a_1) \neq 0$, ce qui est possible puisque la fonction φ_1 n'est pas identiquement nulle.

- 3.2.1. Montrer que fonction $x \mapsto \delta_2(a_1, x)$ définie sur \mathbb{R} n'est pas identiquement nulle, puis en déduire l'existence de $a_2 \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $\Delta_2(a_1, a_2)$ soit inversible.

- 3.2.2. Soit $1 \leq k < p$; on suppose qu'on ait construit les a_i pour $1 \leq i \leq k$ et on cherche à construire a_{k+1} . Montrer que la fonction $x \mapsto \delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, x)$, définie sur \mathbb{R} , n'est pas identiquement nulle puis conclure. on pourra raisonner par l'absurde et développer le déterminant par rapport à sa dernière ligne.

- 3.3. Dans la suite, on désigne par (a_1, \dots, a_p) un p -uplet de nombres réels pour lequel la matrice $M = \Delta_p(a_1, \dots, a_p)$ est inversible. On conserve les notations de la question 3.1.

- 3.3.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Z_n le vecteur de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ de composantes $g_n(a_1), \dots, g_n(a_p)$ et Y_n le vecteur de composantes $\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{p,n}$. Vérifier que $Z_n = M Y_n$.

- 3.3.2. Montrer alors que la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la matrice m^{-1} et les complexes $f'(a_1), \dots, f'(a_p)$, On notera Y cette limite et $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les composantes de Y .

- 3.3.4. Déduire de ce qui précède que $f' \in E_f$. On pourra exploiter la relation (1) vu en 3.1.1.

- 3.4. Montrer plus généralement que si $h \in E_f$ alors h est dérivable et $h' \in E_f$, puis que déduire que E_f est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ stable par \mathcal{D} , l'opérateur de dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

- 3.5. On note \mathcal{D} l'endomorphisme de E_f induit par l'opérateur \mathcal{D} et on désigne par P le polynôme caractéristique de \mathcal{D} . Montrer, en précisant le résultat utilisé, que la fonction f est solution de l'équation différentielle \mathcal{E}_P . En déduire une expression de f puis vérifier que ce type de fonction répond bien à la question.

النهاية FIN END