

# المملكة المغربية

**CNC 2013**

## Mathématiques 2

**AQALMOUN MOHAMED** agrégé de mathématiques MPSI CPGE Khouribga  
**Énoncé**

Le sujet de cette épreuve est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

### **Premier exercice** **Matrice de Gram et application**

Soient  $u_1, \dots, u_n$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ; on note  $G(u_1, \dots, u_n)$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de terme général  $\langle u_i, u_j \rangle$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ . La matrice  $G(u_1, \dots, u_n)$  est dite la matrice de Gram.

On note  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et, pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $u_j = \sum_{k=1}^n m_{k,j} e_k$  l'expression du vecteur  $u_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On désigne enfin par  $M$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de terme général  $m_{i,j}$ .

1. Pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{1, \dots, n\}$ , exprimer le produit scalaire  $\langle u_i, u_j \rangle$ , à l'aide des coefficients de la matrice  $M$  et en déduire que  $G(u_1, \dots, u_n) = {}^t M M$ .
2. Montrer que la matrice  $G(u_1, \dots, u_n)$  est symétrique et positive, et que si la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre alors la matrice  $G(u_1, \dots, u_n)$  est définie positive.
3. On note  $A_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de terme général  $a_{i,j} = \min(i, j)$ .
  - (a) Exprimer  $A_n$  comme matrice de Gram et en déduire qu'elle est symétrique définie positive, puis expliciter une matrice  $R_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , triangulaire supérieure, telle que  $A_n = {}^t R_n R_n$ .
  - (b) On prend  $n = 4$  et note  $X$ , (resp.  $Y$ , resp.  $Z$ ) le vecteur de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  de composantes  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  (resp. 1, 2, 3 et 4, resp.  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$ ). Résoudre les systèmes linéaires  ${}^t R_4 Z = Y$  et  $R_4 X = Z$  puis en déduire la solution du système  $A_4 X = Y$ .

### **Deuxième exercice** **Résolution de l'équation $X^2 + 3X = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$**

On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Justifier que  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . On note  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  les valeurs propres de  $A$  et on suppose que  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ .
2. Pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ , déterminer le vecteur propre  $e_k$  de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$  et ayant pour composantes des nombres entiers dont l'un est égal à 1.

3. Justifier que  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et écrire la matrice  $\Delta$  de  $u$  relativement à cette base.
4. Déterminer une matrice  $P \in GL_3(\mathbb{R})$  telle que  $A = P\Delta P^{-1}$  puis calculer  $P^{-1}$ .
5. Soit  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice vérifiant  $B^2 + 3B = A$ ; on note  $v$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $B$ .
  - (a) Justifier que  $v^2 + 3v = u$ .
  - (b) Vérifier que  $uv = vu$  et en déduire que, pour tout  $k \in \{1, 2, 3\}$ , le vecteur  $v(e_k)$  est colinéaire à  $e_k$ , conclure que la matrice  $V$  de  $v$  relativement à la base  $(e_1, e_2, e_3)$  est diagonale.
  - (c) On pose  $V = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Expliciter  $\Delta$  en fonction de  $V$  puis déterminer les valeurs possibles de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  ainsi que celle de la matrice  $B$ . La relation  $B^2 + 3B = A$  est équivalente à  $V^2 + 3V = \Delta$ .  
Et cette dernière relation est équivalente à  $\alpha_1^2 + 3\alpha_1 = 10, \alpha_2^2 + 3\alpha_2 = 4$  et  $\alpha_3^2 + 3\alpha_3 = 0$ , après la résolution de ces équations, on obtient  $\alpha_1 = -5$  ou  $2, \alpha_2 = -4$  ou  $1$ , et  $\alpha_3 = 0$  ou  $-3$ .
  - (d) Combien de solutions l'équation  $X^2 + 3X = A$  admet-t-elle dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  ?

## Problème

Dans ce problème,  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  désigne l'espace vectoriel des applications de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $\mathcal{D}$  l'opérateur de dérivation défini sur l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  par :  $\mathcal{D}(f) = f'$ ,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ; de même,  $\mathbb{C}[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes à une indéterminée et  $D$  l'opérateur de dérivation défini sur cet espace vectoriel par :  $D(P) = P'$ ,  $P \in \mathbb{C}[X]$ .

On rappelle que  $\mathcal{D}$  et  $D$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $\mathbb{C}[X]$  respectivement.

Si  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  est un polynôme à coefficients complexes de degré  $n \geq 1$ , on lui associe l'équation différentielle homogène noté  $\mathcal{E}_P$  suivante :

$$a_ny^{(n)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0. \quad (\mathcal{E}_P)$$

Par "solution la solution de l'équation différentielle  $(\mathcal{E}_P)$ " on fait référence à toute application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $n$ -fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a_n f^{(n)(x)} + \dots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0.$$

Comme  $a_n \neq 0$ , il est évident que toute solution de  $\mathcal{E}_P$  est un élément de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ . L'ensemble des solutions est donc un sous espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

**La troisième partie du problème utilise les résultats de l'avant dernière question de la seconde partie ; la deuxième partie utilise les résultats de la première.**

### Première partie

#### Résultats préliminaires

- 1.1. Soit  $n$  un entier naturel quelconque ; on note  $\mathbb{C}_n[X]$  le sous espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$  formé des polynômes de degré  $\leq n$ .
  - 1.1.1. Montrer que  $\mathbb{C}_n[X]$  est stable par l'endomorphisme  $D$ .  
*Dans la suite on note  $D_n$  l'endomorphisme induit par  $D$  sur  $\mathbb{C}_n[X]$  et  $I_n$  l'application identité de  $\mathbb{C}_n[X]$  définie par :  $I_n(P) = P, P \in \mathbb{C}_n[X]$ .*

- 1.1.2. Montrer que l'endomorphisme  $D_n$  est nilpotent.
- 1.1.3. Montrer que, pour tout complexe non nul  $\alpha$ , l'endomorphisme  $D_n + \alpha I_n$  est inversible et exprimer son inverse à l'aide des puissances de  $\alpha$  et  $D_n$ .
- 1.2. Déduire de ce qui précède que si  $\alpha$  est un complexe non nul et  $R \in \mathbb{C}[X]$  est un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$ , alors il existe un unique polynôme  $R_1 \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $R'_1 + \alpha R_1 = R$ ; vérifier que  $R_1$  et de degré  $n$  et l'exprimer en fonction de  $R$ .
- 1.3. Soit  $\lambda$  un nombre complexe et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue.
- 1.3.1. Montrer que les solutions de l'équation différentielle  $y' - \lambda y = g$  sont de la forme  $x \mapsto G(x)e^{-\lambda x}$  où  $G$  est une primitive de la fonction  $s \mapsto g(s)e^{-\lambda s}$ .
- 1.3.2. Dans cette question, on pose  $g(x) = R(x)e^{\lambda x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , où  $R$  est un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les solutions de l'équation différentielle  $y' - \lambda y = g$  sont de la forme  $x \mapsto S(x)e^{\lambda x}$ , où  $S$  est un polynôme à coefficients complexes dont le polynôme dérivé est égal à  $R$ .
- 1.3.3. Dans cette question, on pose  $g(x) = R(x)e^{\mu x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , où  $\mu$  désigne un complexe distinct de  $\lambda$  et  $R$  est un polynôme à coefficients complexes. Montrer que les solutions de l'équation différentielle  $y' - \lambda y = g$  sont de la forme  $x \mapsto R_1(x)e^{\mu x} + ce^{\lambda x}$  où  $R_1$  est l'unique polynôme à coefficients complexes vérifiant  $R'_1 = (\mu - \lambda)R_1 = R$  et  $c$  est un paramètre complexe.

## Deuxième partie

### Expression des solutions de l'équation différentielle ( $\mathcal{E}_P$ )

#### 2.1. Cas où $P = (X - \lambda)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que dans ce cas,  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est solution de l'équation différentielle  $\mathcal{E}_P$  si, et seulement si, il existe un polynôme  $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$  tel que  $f(x) = R(x)e^{\lambda x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . On pourra calculer la dérivée  $n$ -ième de la fonction  $h : x \mapsto e^{-\lambda x}f(x)$ .

#### 2.2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul ; on pose $P = (X - \lambda)Q$ .

2.2.1. Montrer que les deux endomorphismes  $Q(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D} - \lambda I)$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , commutent ;  $I$  désigne l'application identité du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

2.2.2. En déduire que  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  est solution de l'équation différentielle  $\mathcal{E}_P$  si, et seulement si,  $P(\mathcal{D})(f) = 0$  si, et seulement si,  $f' - \lambda f$  est solution de l'équation différentielle  $\mathcal{E}_Q$ .

2.3. En faisant un raisonnement par récurrence, retrouver le résultat de la question 2.1. ci-dessus sans savoir recours à un calcul de la dérivée  $n$ -ième.

2.4 **Un exemple :** Déterminer les entiers qui sont racines du polynôme  $P_1 = (X - 1)(X + 1)^3$  puis le factoriser dans  $\mathbb{C}[X]$ ; donner l'expression des solutions de l'équation différentielle  $\mathcal{E}_{P_1}$ .

2.5. **Cas général :** On suppose ici que le polynôme s'écrit  $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{m_k}$ , où  $r$  est un entier  $\geq 2$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sont des complexes deux à deux distincts, et  $m_1, \dots, m_r$  des entiers naturels non nuls

En faisant un raisonnement par récurrence sur le degré de  $P$ , montrer que les solutions de l'équation différentielle  $\mathcal{E}_P$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \sum_{k=1}^r R_k(x)e^{\lambda_k x}$ , où  $R_k \in \mathbb{C}_{m_k-1}[X]$  pour tout  $k \in \{1, \dots, r\}$ . On pourra exploiter le résultat de la question 2.2.2.. Pour  $n = 2$ .

- 2.6. Montrer en précisant l'énoncé du théorème utilisé, que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ , les solutions de l'équation différentielle  $\mathcal{E}_P$  ont toujours la forme des solutions trouvées dans la question 2.5. précédente. Quelle est alors la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des solutions de  $\mathcal{E}_P$  ?

- 2.7. **Un autre exemple :** Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle  $\mathcal{E}_{P_2}$  où  $P_2 = X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1$ , sachant que 1 est racine triple de  $P_2$ .

### Troisième partie Un résultat de finitude

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction dérivable ; pour tout réel  $\tau$ , on désigne par  $f_\tau$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par  $f_\tau(x) = f(x + \tau)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ; on note  $E_f = \text{Vect}(\{f_\tau ; \tau \in \mathbb{R}\})$  le sous espace vectoriel complexe de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  engendré par les fonctions  $f_\tau$  lorsque  $\tau$  décrit  $\mathbb{R}$ .

On se propose dans cette partie de caractériser  $f$  pour que  $E_f$  soit de dimension finie. On suppose donc que  $E_f$  est de dimension finie  $p \geq 1$  et on note  $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$  une base de  $E_f$ .

- 3.1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit la fonction  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par  $g_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n} + x) - f(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- 3.1.1. Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $g_n \in E_f$  et justifier qu'il existe des com-

$$\text{plexes } \alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{p,n} \text{ tels que } g_n = \sum_{k=1}^p \alpha_{k,n} \varphi_k \quad (1)$$

- 3.1.2. Montrer que la suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 1}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $f'$ .

- 3.2. Pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$  et tout  $k$ -uplet  $(x_1, \dots, x_k)$  de réels, on note  $\Delta_k(x_1, \dots, x_k)$  la matrice de  $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  "doit être dans  $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$  ?" de terme général  $\varphi_j(x_i)$ ,  $(i, j) \in \{1, \dots, k\}^2$  (coefficients de la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne), et désigne par  $\delta_k(x_1, \dots, x_k)$  le déterminant de la matrice  $\Delta_k(x_1, \dots, x_k)$ .

On cherche ici qu'il existe  $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$  tel que, pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\delta_k(a_1, \dots, a_k) \neq 0$ . On va établir l'existence des  $a_k$ ,  $1 \leq k \leq p$ , par récurrence.

On choisit donc  $a_1 \in \mathbb{R}$ , tel que  $\varphi(a_1) \neq 0$ , ce qui est possible puisque la fonction  $\varphi_1$  n'est pas identiquement nulle.

- 3.2.1. Montrer que fonction  $x \mapsto \delta_2(a_1, x)$  définie sur  $\mathbb{R}$  n'est pas identiquement nulle, puis en déduire l'existence de  $a_2 \in \mathbb{R}$  tel que la matrice  $\Delta_2(a_1, a_2)$  soit inversible.

- 3.2.2. Soit  $1 \leq k < p$  ; on suppose qu'on ait construit les  $a_i$  pour  $1 \leq i \leq k$  et on cherche à construire  $a_{k+1}$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto \delta_{k+1}(a_1, \dots, a_k, x)$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , n'est pas identiquement nulle puis conclure. On pourra raisonner par l'absurde et développer le déterminant par rapport à sa dernière ligne.

- 3.3. Dans la suite, on désigne par  $(a_1, \dots, a_p)$  un  $p$ -uplet de nombres réels pour lequel la matrice  $M = \Delta_p(a_1, \dots, a_p)$  est inversible. On conserve les notations de la question 3.1.

- 3.3.1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $Z_n$  le vecteur de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$  de composantes  $g_n(a_1), \dots, g_n(a_p)$  et  $Y_n$  le vecteur de composantes  $\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{p,n}$ . Vérifier que  $Z_n = MY_n$ .

- 3.3.2. Montrer alors que la suite  $(Y_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$  est convergente et exprimer sa limite à l'aide de la matrice  $m^{-1}$  et les complexes  $f'(a_1), \dots, f'(a_p)$ . On notera  $Y$  cette limite et  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  les composantes de  $Y$ .

- 3.3.4. Déduire de ce qui précède que  $f' \in E_f$ . On pourra exploiter la relation (1) vu en 3.1.1.

- 3.4. Montrer plus généralement que si  $h \in E_f$  alors  $h$  est dérivable et  $h' \in E_f$ , puis que déduire que  $E_f$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  stable par  $\mathcal{D}$ , l'opérateur de dérivation sur  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

- 3.5. On note  $\mathcal{D}$  l'endomorphisme de  $E_f$  induit par l'opérateur  $\mathcal{D}$  et on désigne par  $P$  le polynôme caractéristique de  $\mathcal{D}$ . Montrer, en précisant le résultat utilisé, que la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle  $\mathcal{E}_P$ . En déduire une expression de  $f$  puis vérifier que ce type de fonction répond bien à la question.

النهاية **FIN END**