

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1 :

A) Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $(E_1) : 7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 ;$

2) $(E_2) : y' + 2xy = 2xe^{-x^2} ;$

3) $(E_3) : y' + 2y = x^2 - 2x + 3 ;$

4) $(E_4) : (x^2 + 1)y' + xy = 1 ;$

5) $(E_5) : y' + y = xe^{-x} ;$

6) $(E_6) : \sqrt{1 + x^2}y' - y = 1 ;$

7) $(E_7) : y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x) ;$

8) $(E_8) : (x^2 + 1)^2y' + 2x(1 + x^2)y = 1 ;$

B) Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles spécifiés :

1) $(E_9) : \sin(x)y' - \cos(x)y + 1 = 0 ;$ (sur $]0, \pi[$)

2) $(E_{10}) : \sinh(x)y' - \cosh(x)y = 1 ;$ (sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$)

Exercice 2 :

Déterminer une équation différentielle ayant comme solutions les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{C + x}{1 + x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 :

1) Soient $C, D \in \mathbb{R}$.

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x \succ 0 \\ De^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x \prec 0 \end{cases}$$

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f soit prolongeable par continuité en 0.

b) Supposons que cette condition est satisfaite. Notons encore f ce prolongement.

Montrer alors que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

2) Considérons maintenant l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y' - y = 0$$

Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.

3) Résoudre enfin (E) sur \mathbb{R} .

Équations différentielles du second ordre

Exercice 4 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $(E_1) : y'' + 5y' - 6y = e^x ;$

2) $(E_2) : y'' + 4y' + 13y = e^{-x} ;$

3) $(E_3) : y'' + y = \cos(2x) ;$

4) $(E_4) : y'' + 3y' + 2y = e^{-x} + \sin(x) ;$

5) $(E_5) : y'' + y = \sin(\omega x) ;$ (discuter suivant ω).

6) $(E_6) : y'' - 2y' + y = x, y(0) = y'(0) = 0 ;$

7) $(E_7) : y'' + 9y = x + 1, y(0) = 0 ;$

8) $(E_8) : y'' - 2y' + y = \sin^2 x ;$

9) $(E_9) : y'' + \beta^2 y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ ($\beta > 0$) fixé ;

Exercice 5 :

Déterminer une équation différentielle ayant pour solutions les fonctions de la forme

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-x}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Équations différentielles du second ordre à coefficients variables

Exercice 6 : (Résolution via un changement de variable)

1) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2(x - 1)(1 + x^2)y' + y = 0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $t = \arctan x$.

2) Résoudre sur $] - 1, 1[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = \arccos x$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $t = \arccos x$.

3) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' + xy' + y = 0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $x = e^t$.

4) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'' + xy' - 4y = 0$$

Vous pouvez procéder au changement de variable $x = \sinh(t)$.

Exercice 7 : (Résolution via un changement de fonction)

1) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(E_1) : (1 + e^x)y'' + y' - e^xy = 0$$

Vous pouvez introduire la fonction $z = y' + y$.

2) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(E_1) : xy'' - (1 + x)y' + y = 1$$

Vous pouvez introduire la fonction $z = y' - y$.

Exercices divers :

Exercice 8 :

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x)f(y)$$

Exercice 9 :

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$.

Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Exercice 10 :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\lambda - x)$$

Exercice 11 :

1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

2) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)dt$$