Séries dans un evn de dimension finie

Familles sommables

Résumé Lacunaire

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

I) Séries dans un evn de dimension finie.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un evn de dimension finie

1) Généralités

Déf 1

La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et ssi la suite vectorielle $(S_n)_{n \geq 0}$ converge ; où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum u_k$$ [redacted]

La série $\sum_{n \geq N} u_n$ converge si et ssi la suite vectorielle $(S_n)_{n \geq N}$ converge ; où

$$\forall n \geq N,\ S_n = \sum u_k$$ [redacted]

$\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\iff \sum_{n \geq N} u_n$ [redacted]

En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=N}^{+\infty} u_n + \sum u_n$$ [redacted]

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Prop 2

1) $\sum_n U_n$ converge $\Longrightarrow \lim_n U_n =$ [redacted]

2) $\left(U_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0\right) \Longrightarrow \sum_n U_n$ [redacted]

Prop 3

(La suite $(U_n)_n$ converge) $\Longleftrightarrow$ (La série télescopique $\sum$ [redacted] converge)

2) Lien avec les séries composantes

Ici :

- $\rightarrow$ $B=(e_1,\dots,e_d)$ une base de E.
- $\rightarrow$ Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, $U_n=\sum_{i=1}^{d} U_n^i e_i$
- $\rightarrow$ Les suites $(U_n^i)_n$ sont les suites composantes de (U_n) dans B
- $\rightarrow$ Les séries $\sum_n U_n^i$ sont les séries composantes de $\sum U_n$ dans B.

Prop 4

1) $\sum U_n$ converge $\Longleftrightarrow \left(\forall 1\le i\le d, \sum_n U_n^i\right.$ [redacted] $\left.\right)$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{i=\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \text{[redacted]}\right) e_i$$

3) Séries absolument convergentes (ACV)

Déf 5

$\sum_n U_n$ est ACV $\Longleftrightarrow \sum_n$ [redacted] CV

Pr. ELAMIRI   Cours disponible sur   www.iamateacher.org

Prop 6

1) $\sum u_n$ ACV $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ [redacted]

2) Si $\sum u_n$ est ACV, on a :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \text{[redacted]}$$

C'est l'inégalité triangulaire

4) Algèbre normée

Déf 7

Soit $(A, +, \cdot, \times)$ une algèbre.
Si $(A, \| \ \|)$ est un evn vérifiant :

$$\forall x, y \in A, \ \|x \times y\| \text{ [redacted]}$$

On dit que A est une algèbre normée.

Prop 8

Si A est une algèbre normée, on a :

$$\boxed{\forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}, \ \|a^n\| \text{ [redacted]}}$$

Prop 9

Soit A une algèbre normée de dimension finie.
Si $a \in A$ avec $\|a\|$ [redacted], alors :

1) La série $\sum_{n \geqslant 0} a^n$ est ACV.

2) $(1-a)$ est inversible et on a :

$$\boxed{(1-a)^{-1} = \text{[redacted]}}$$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Prop et déf 10

Soit A une algèbre normée de dimension finie.

Si $a \in A$.

1) La série $\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!}$ est [redacted]

2) La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ se note [redacted] et s'appelle [redacted] de a.

Prop 11

Soit A une algèbre normée de dimension finie. On a :

1) $\exp(0) =$ [redacted]

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \exp(\lambda \cdot 1_A) =$ [redacted]

3) Si a et $b \in A$ avec [redacted], alors [redacted]

$\exp(a+b) =$ [redacted]

4) $\forall a \in A$, $\exp(a)$ est inversible et on a : $(\exp(a))^{-1} =$ [redacted]

Cas particulier important : L'algèbre normée $M_d(\mathbb{R})$

1) $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $\exp(A) = \sum$ [redacted]

2) $\exp(O_d) =$ [redacted]

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \exp(\lambda \cdot I_d) =$ [redacted]

4) Si A et $B \in M_d(\mathbb{R})$, avec [redacted], On a :

$\exp(A+B) =$ [redacted]

5) $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$, $\exp(A)$ est une matrice inversible, et on a :

$(\exp(A))^{-1} =$ [redacted]

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

II) Familles sommables

Jusqu'à la fin du chapitre, toutes les familles $(a_i)_{i\in I}$ sont des familles de nombres réels ou complexes.

2) Familles sommables positives

Déf 12

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

1) $(a_i)_{i\in I}$ est dite famille sommable si et ssi l'ensemble suivant est une partie [redacted] de $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\left\{ \sum_{j\in J} a_j \;/\; J \text{ partie [redacted] de } I \right\}}$$

2) Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, la borne [redacted] de l'ensemble $\left\{ \sum_{j\in J} a_j \;/\; J \text{ partie finie de } I \right\}$ s'appelle la somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$, et se note [redacted]

Réflexes

Supp que $(a_i)_{i\in I}$ est une f^lle^ sommable positive, on a :

1) $$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left(\left\{ \sum_{j\in J} a_j \;/\; J \text{ partie finie de } I \right\}\right)$$

2) Si $J \subset I$ et fini, on a :

$$\boxed{\sum_{j\in J} a_j \text{ [redacted] } \sum_{i\in I} a_i}$$

Convention

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille positive non sommable, on convient d'écrire :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \text{[redacted]}}$$

Prop 13 (Cas d'une famille finie)

Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille positive et finie, alors elle est [redacted], et sa somme coïncide avec sa somme finie $\sum_{i\in I} a_i$.

Prop 14 (Critère de comparaison)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles positives vérifiant :

$$\boxed{\forall i\in I,\ a_i \le b_i}$$

1) i) ([redacted]$)_{i\in I}$ sommable $\Longrightarrow$ ([redacted]$)_{i\in I}$ sommable

ii) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} \text{[redacted]}_i \le \sum_{i\in I} \text{[redacted]}_i}$$

2) (([redacted]$)_{i\in I}$ n'est pas sommable) $\Longrightarrow$ (([redacted]$)_{i\in I}$ n'est pas sommable)

Prop 15 (Lien avec les séries)

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille positive. On a

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n\ge 0}$ [redacted] converge

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}}$$ [redacted]

Prop 16

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille positive. On a

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n\geq}$ [redacted] converge

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=}^{+\infty}$$ [redacted]

Corollaire 17

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes positifs. On a :

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n\geq}$ [redacted] converge

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=}^{+\infty}$$ [redacted]

Prop 18

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ une série à termes positifs. On a aussi :

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum_{n\geq}$ [redacted] converge

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n = \sum_{n=}^{+\infty}$$ [redacted]

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Exemples express et fréquents :

1) i) $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^-}$ sommable $\Leftrightarrow \sum_{n\geq}$ a [redacted] CV

ii) Dans ce cas, on a :

$\sum_{n\in\mathbb{Z}^-} a_n = \sum_{n=}^{+\infty} a$ [redacted]

2) i) $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^{-*}}$ sommable $\Leftrightarrow \sum_{n\geq}$ a [redacted] CV

ii) Dans ce cas, on a :

$\sum_{n\in\mathbb{Z}^{-*}} a_n = \sum_{n=}^{+\infty} a$ [redacted]

Prop 19

Soit $(a_i)_{i\in I}$ famille positive sommable.

Toute sous-famille de $(a_i)_{i\in I}$ est aussi [redacted]

Sommations par paquets

Prop 20

$(a_i)_{i\in I}$ famille positive et I dénombrable.

I_1 et I_2 forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Leftrightarrow$ [redacted] et [redacted] sommables

2) Dans ce cas, on a :

$\sum_{i\in I} a_i =$ [redacted] $+$ [redacted]

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Prop 21

$(a_i)_{i\in I}$ famille **positive** et I dénombrable.

$I_1, \dots, I_n$ forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Longleftrightarrow$ $(\forall\, 1\leq k\leq n,$ [redacted] est sommable$)$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{n} \text{[redacted]}$$

Prop 22

$(a_i)_{i\in I}$ famille **positive** et I dénombrable.

$(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \text{a) } \forall k\in\mathbb{N},\ (a_i) \text{ [redacted] est sommable} \\ \text{b) La série } \sum_{k\geq 0} \text{[redacted] converge} \end{cases}$

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \text{[redacted]}$$

2) Familles sommables de réels et complexes

Notons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Déf 23

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$.

$(a_i)_{i\in I}$ est dite **sommable** si et ssi la famille positive [redacted] est sommable.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Prop et Déf 24

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels.

1) $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ sont [redacted]

2) La somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ est :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ \text{ [redacted] } \sum_{i\in I} a_i^-$$

Prop et Déf 25

Soit $(a_j)_{j\in I}$ une famille sommable de complexes.

1) $(Re(a_j))_{j\in I}$ et $(Im(a_j))_{j\in I}$ sont [redacted]

2) La somme de la famille $(a_j)_{j\in I}$ est :

$$\sum_{j\in I} a_j = \sum_{j\in I} Re(a_j) \text{ [redacted] } \sum_{j\in I} Im(a_j)$$

Prop 26

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes réels ou complexes. On a :

1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sommable $\Longleftrightarrow$ La série $\sum a_n$ [redacted]

2) Dans ce cas, on a :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum^{+\infty} \text{[redacted]}}$$

Prop 27

1) Toute famille finie de réels ou complexes est [redacted]

2) Sa somme coïncide avec sa somme finie $\sum_{i\in I} a_i$.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Prop 28 (Lien avec les séries)

I est supposé dénombrable.

Soit $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow I$ une bijection.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels ou complexes. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\iff$ La série $\sum_{n\geqslant 0}$ [redacted]

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}$$ [redacted]

Prop 29 (Combinaison linéaire)

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables de réels ou complexes.

Toute combinaison linéaire $(\alpha a_i+\beta b_i)_{i\in I}$ [redacted], et on a :

$$\sum_{i\in I}(\alpha a_i+\beta b_i) =$$ [redacted]

Prop 30 (Inégalité triangulaire)

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels ou complexes. On a :

$$\left|\sum_{i\in I} a_i\right|$$ [redacted]

Prop 31

Toute sous-famille d'une famille sommable de réels ou complexes est [redacted]

Sommations par paquets

Prop 32

$(a_i)_{i\in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

I_1 et I_2 forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\iff$ $(a_i)_{i\in}$ [redacted] et $(a_i)_{i\in}$ [redacted] sommables

2) Dans ce cas, on a :

$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in}$ [redacted] $a_i + \sum_{i\in}$ [redacted] a_i

Prop 33

$(a_i)_{i\in I}$ famille de réels ou complexes et I dénombrable.

$I_1, \dots, I_n$ forment une partition de I. On a :

1) $(a_i)_{i\in I}$ sommable $\iff$ $(\forall\, 1 \le k \le n,\ (a_i)_{i\in}$ [redacted] est sommable$)$

2) Dans ce cas, on a :

$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{n} \Big($ [redacted] $\Big)$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Prop 34 (Sommation par paquets)

I dénombrable et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels ou complexes. On a :

1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $(a_i)_{i\in I_n}$ sommable.

2) La série $\sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i\in} a_i\Big)$ [redacted]

3) $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}$ [redacted]

C'est la sommation par paquets

NB

Pour montrer la sommabilité de la famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels ou complexes, on applique à la famille positive ([redacted]$)_{i\in I}$ la caractérisation par paquets.

3) Suites doubles

Partitions usuelles de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

1) $(\mathbb{N}\times$ [redacted]$)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2) ([redacted]$\times\mathbb{N})_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

3) $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

où $I_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, i+j =$ [redacted] $\}$

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

NB

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, i+j = n\}$$

$I_n = \{(i,$ [redacted] $) \,/\,$ [redacted] $\leq i \leq$ [redacted] $\}$

$I_n = \{($ [redacted] $, i) \,/\,$ [redacted] $\leq i \leq$ [redacted] $\}$

Partitions usuelles de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

1) $(\mathbb{N}^* \times$ [redacted] $)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

2) ([redacted] $\times \mathbb{N}^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

3) $(I_n)_{n \geq}$ [redacted] est une partition de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

où $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,/\, i+j =$ [redacted] $\}$

NB

Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \,/\, i+j = n\}$$

$I_n = \{(i, n-i) \,/\,$ [redacted] $\leq i \leq$ [redacted] $\}$

$I_n = \{(n-i, i) \,/\,$ [redacted] $\leq i \leq$ [redacted] $\}$

Prop 35

Soit $(a_{mn})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double positive.

1) Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

ii) A) $\forall m\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{\text{[redacted]} \geqslant 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\sum_{\text{[redacted]} \geqslant 0} \left(\sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$ converge.

iii) A) $\forall n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{\text{[redacted]} \geqslant 0} a_{mn}$ converge

B) La série $\sum_{\text{[redacted]} \geqslant 0} \left(\sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$ converge.

2) Dans ce cas, on a :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} \left(\sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} a_{mn} \right) = \sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} \left(\sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$$

Prop 36

Soit $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou complexes.

Supposons que $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est [redacted]. On a :

$$\sum_{\text{[redacted]}\in\mathbb{N}^2} a_{mn} = \sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} \left(\sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} a_{mn} \right) = \sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} \left(\sum_{\text{[redacted]}=0}^{+\infty} a_{mn} \right)$$

NB

En pratique, pour montrer la sommabilité de la suite double $(a_{mn})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, on applique la (prop 1) à la suite ([redacted])$_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

Pr. ELAMIRI Cours disponible sur www.iamateacher.org

4) Produit de Cauchy de deux suites complexes

Déf 37

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries complexes.

Le produit de Cauchy de ces deux séries est la série $\sum_{n\geq 0} C_n$

où :

$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n = \sum_{k=0}$ [redacted] $a_k b$ [redacted]

NB :

On a aussi :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n = \sum_{k=0}^{n} a$ [redacted] b_k

$\forall n\in\mathbb{N},\ C_n = \sum_{i+j=}$ [redacted] $a_i b_j$

Prop 38

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries complexes [redacted]. On a :

1) La suite double $(a_p b_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

2) La série produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} C_n$ est [redacted]

3) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\right.$ [redacted] $\left.\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\right.$ [redacted] $\left.\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q$

Fin