# INTÉGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

## 1) Convergence d'une intégrale impropre (ou généralisée)

**Définition 1 :**

Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{K}$ CPM, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) i) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f(x)dx$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand y tend vers b.

   ii) Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ [redacted]

2) En cas de convergence, on écrit $\lim\limits_{y \to b} \left( \int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx$

**Définition 2 :**

Soit $f : ]a, b] \to \mathbb{K}$ CPM, où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ .

1) i) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f(x)dx$ a une limite dans $\mathbb{K}$ quand y tend vers a.

   ii) Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

2) En cas de convergence, on écrit $\lim\limits_{y \to a} \left( \int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f(x)dx \right) = \int_a^b f(x)dx$

**Définition 3 :**

Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{K}$ CPM, où $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $c \in ]a, b[$.

1) i) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^{\text{[redacted]}} f(x)dx$ et $\int_{\text{[redacted]}}^b f(x)dx$ convergent.

   ii) Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ [redacted]

2) En cas de convergence, on écrit $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\text{[redacted]}} f(x)dx + \int_{\text{[redacted]}}^b f(x)dx$.

**Proposition 4 :**

Soit I un intervalle dont les extrémités inférieure et supérieure (dans $\overline{\mathbb{R}}$) sont notées a et b respectivement.

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction CPM et F une primitive de f sur I .

1) $\int_I f(x)dx$ est *convergente* si et seulement si $\lim\limits_{x\to \text{[redacted]}} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to \text{[redacted]}} F(x)$ existent dans $\mathbb{K}$.

2) Auquel cas on a $\int_I f(x)dx = \lim\limits_{x\to \text{[redacted]}} F(x) - \lim\limits_{x\to \text{[redacted]}} F(x)$, noté $[F(x)]_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}}$.

**Proposition 5 :**

Soit $f : ]a, b] \to \mathbb{K}$ CPM, où $a, b \in \mathbb{R}$.

**Si** $\lim\limits_{x\to \text{[redacted]}} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$, **alors** l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge.

La Proposition 5 est à adapter au cas de **[a,b[** et quand $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$

**Définition 6 :**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ CPM, où $I$ intervalle de $\mathbb{R}$.

1) L'intégrale $\int_I f(x)dx$ est dite absolument convergente si et seulement si l'intégrale $\int_I$ [redacted] $dx$ converge.

2) On dit aussi que la fonction $f$ est int[redacted] sur I.

**NB :**

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et positive alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $f$ est *intégrable* sur I.

2) L'intégrale $\int_I$ [redacted] $dx$ est *absolument convergente*.

3) L'intégrale $\int_I$ [redacted] $dx$ est *convergente*.

**Proposition 7 :**

Si $f : I \to \mathbb{C}$ CPM.

1) $\int_I f(x)dx$ converge $\Leftrightarrow \left(\int_I Re(f(x))dx \text{ et } \int_I Im(f(x))dx\right.$ [redacted] $\left.\right)$

2) Dans ce cas on a :

$$\int_I f(x)dx = \int_I Re(f(x))dx \text{ [redacted] } \int_I Im(f(x))dx$$

## 2) Intégrabilité des fonctions de référence

**Proposition 1 :** (Intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha$ [redacted]

ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *diverge* $\Leftrightarrow$ $\alpha$ [redacted]

iii) Si $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx =$ [redacted]

iv) Si $\alpha \leq 1$ alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx =$ [redacted]

2) i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha$ [redacted]

ii) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *diverge* $\Leftrightarrow$ $\alpha$ [redacted]

iii) Si $\alpha < 1$ alors $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx =$ [redacted]

iv) Si $\alpha \geq 1$ alors $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^\alpha}\, dx =$ [redacted]

3) Soient $a < b \in \mathbb{R}$. On a :

i) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha$ [redacted]

ii) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(b-x)^\alpha}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\alpha$ [redacted]

**Proposition 2 :** ( Autres fonctions intégrables usuelles)

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\lambda$ [redacted]

ii) Si $\lambda > 0$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx =$ [redacted]

2) $\displaystyle\int_0^{1} |\ln(x)|\, dx$ [redacted]

## 3) Cas des fonctions positives et relations de comparaisons

**Proposition 1 :**

Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ CPM et positive, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\, dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_a^{y} f(x) dx$ est [redacted]

2) Si $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\, dx$ diverge, on écrit $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\, dx =$ [redacted]

**NB 1 :**

De même, si $f : ]a, b] \to \mathbb{R}$ CPM et positive, où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

1) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge si et seulement si la fonction $y \mapsto \displaystyle\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f(x)dx$ est [redacted]

2) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, on écrit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ [redacted]

## Proposition 2

Soient $f$ *et* $g : I \to \mathbb{R}$ CPM et positives.

Supposons que : $[\forall x \in I,\ f(x) \le g(x)]$. On a :

1) $\left(\displaystyle\int_I \text{[redacted]}\, dx \textit{ converge}\right) \Rightarrow \left(\displaystyle\int_I \text{[redacted]}\, dx \textit{ converge}\right)$

2) $\left(\displaystyle\int_I \text{[redacted]}\, dx \textit{ diverge}\right) \Rightarrow \left(\displaystyle\int_I \text{[redacted]}\, dx \textit{ diverge}\right)$

**NB :**

Si [redacted] est intégrable sur $I$ alors [redacted] l'est aussi.

## Proposition 3

Soient $f$ *et* $g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ CPM et positives ; où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposons que $f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x))$. On a :

1) $\displaystyle\int_a^b \text{[redacted]}\, dx \textit{ converge} \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b \text{[redacted]}\, dx \textit{ converge}$

2) $\displaystyle\int_a^b \text{[redacted]}\, dx \textit{ diverge} \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b \text{[redacted]}\, dx \textit{ diverge}$

**NB 1 :**

La *proposition 3* vaut aussi si on remplace $f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x))$ par $f(x) \underset{x \to b}{=} o(g(x))$.

**NB 2 :**

La *proposition 3* est à adapter à l'intervalle $]a, b]$ ; où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

## Proposition 4

Soient $f$ *et* $g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ CPM et positives ; où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Supposons que $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$. On a :

1) $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx \textit{ converge} \Longleftrightarrow \displaystyle\int_a^b \text{[redacted]}\, dx$ [redacted]

2) Autrement dit :

$\displaystyle\int_a^b \text{[redacted]}\, dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx$ sont de même [redacted]

**NB 1 :**

La *proposition 4* est à adapter à l'intervalle $]a, b]$ ; où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

**NB 2 :**

La *proposition 4* est valable aussi quand $f$ est négative.

## 4) Propriétés relatives aux intégrales généralisées

**Proposition 1 :** (Linéarité)

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ CPM et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1) **Si** les intégrales $\displaystyle\int_I f(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_I g(x)\ dx$ convergent **alors** il en est de même pour l'intégrale $\displaystyle\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx$.

2) Le cas échéant, on a

$$\int_I (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx =$$ [redacted]

**Proposition 3 :** (Positivité-Croissance)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ CPM. Supposons que $\displaystyle\int_I f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_I g(x)\, dx$ convergent.

1) $f \geq 0 \ \Rightarrow \ \displaystyle\int_I f(x)\ dx$ [redacted] (Positivité de l'intégrale généralisée)

2) $f \geq g \ \Rightarrow \ \displaystyle\int_I f(x)\ dx \geq$ [redacted] (Croissance de l'intégrale généralisée)

**Proposition 4 :** (Intégrale nulle d'1 fonct[redacted] positive)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

**Si** ( 1) *f est* [redacted] *sur I* ; 2) *f est positive sur I* ; 3) $\displaystyle\int_I f(x)\ dx = 0$ ) **alors** ([redacted])

**Proposition 5 :** (Comparaison série-intégrale)

Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ CPM, positive et décroissante. On a :

$$\sum_{n\geq 0} \text{[redacted]} \ \textit{converge} \ \Leftrightarrow \ \int_0^{+\infty} f(x)\ dx \ \textit{converge}$$

**Autrement dit :** La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}$ [redacted] et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ sont de même [redacted]

## 5) Propriétés des fonctions intégrables

**Proposition 1 :**

1) ($f$ intégrable) $\Leftrightarrow$ ($|f|$ intégrable) $\Leftrightarrow$ ($\overline{f}$ intégrable)

2) Toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est [redacted]

3) L'ensemble des fonctions intégrables, noté $L$[redacted]$(I, \mathbb{K})$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4) L'application $f \mapsto \displaystyle\int_I f(x)\ dx$ est une [redacted] de $L$[redacted]$(I, \mathbb{K})$.

**Proposition 2 :**

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ CPM.

$f$ est intégrable si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont [redacted]

**Proposition 3 :**
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ CPM.

1) **Si** $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ est ACV **alors** $\displaystyle\int_I f(x)\,dx$ est [redacted]

2) Dans ce cas, on a l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_I f(x)\,dx\right|$$ [redacted]

## 6) Fonctions de carré intégrable

**Notation et vocabulaire :**

1. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ CPM. Si [redacted] est intégrable sur $I$, on dit que $f$ est de carré intégrable.
2. $L$[redacted]$(I, \mathbb{K})$ désignera l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

**Proposition 1 :**

1. Le produit de deux fonctions de carré intégrable sur $I$ est une fonction [redacted]
2. La combinaison linéaire de deux fonctions de carré intégrable sur $I$ est une fonction [redacted]
3. $L$[redacted]$(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Proposition 2 :** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $f, g \in L$[redacted]$(I, \mathbb{R})$.On a

$$\left|\int_I f(x)g(x)\,dx\right| \leq$$ [redacted]

## 7) Intégration par parties

**Proposition :**
Soient $f, g \in \mathcal{C}^1([a, b[, \mathbb{K})$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
On suppose que $\lim$ [redacted] existe dans $\mathbb{K}$. Alors :

1) $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ sont de même nature.

2) En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

où $[f(x)g(x)]_a^b =$ [redacted]

**NB 1 :**
La proposition vaut pour $]a, b]$ :
On suppose que $\lim$ [redacted] existe dans $\mathbb{K}$, et on conclut que :

1) $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ seront de même nature.

2) En cas de convergence, on aura :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

où $[f(x)g(x)]_a^b =$ [redacted]

**NB 2 :**

La proposition vaut aussi pour $]a, b[$ :
On suppose que lim [redacted] et lim [redacted] existent dans $\mathbb{K}$. Et on conclut que :

1) $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ seront de même nature.

2) En cas de convergence, on aura :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

où $[f(x)g(x)]_a^b =$ [redacted]

## 8) Formule de changement de variable

**Proposition :**

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{K}$ continue.
Soit $\Phi : ]\alpha, \beta[ \to ]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante.

1) Les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta$ [redacted] $dt$ sont de même [redacted]

2) En cas de convergence, on a l'égalité :

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ [redacted] $\displaystyle\int_\alpha^\beta$ [redacted]

---

Soient $a, b, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f : ]a, b[ \to \mathbb{K}$ continue.
Soit $\Phi : ]\alpha, \beta[ \to ]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement décroissante.

1) Les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta$ [redacted] sont de même nature.

2) En cas de convergence, on a l'égalité :

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx =$ [redacted] $\displaystyle\int_\alpha^\beta$ [redacted]

## 9) Intégration des relations de comparaison

**Proposition 1 :** **(Comparaison de $\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f$ et $\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} g$ )**

Soient $f : [a, b[ \to \mathbb{K}$ et $g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ CPM avec g positive, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x \to b}{=} o(g(x)) \\ \displaystyle\int_a^b \textbf{g} \textit{ converge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f \underset{x \to b}{=} o\left(\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} g\right)$

2) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x)) \\ \displaystyle\int_a^b \textbf{g} \textit{ converge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f \underset{x \to b}{=} O\left(\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} g\right)$

3) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x) \\ \displaystyle\int_a^b \textbf{g} \textit{ converge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f \underset{x \to b}{\sim} \int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} g$

**Proposition 2 :**

Soient $f : [a, b[ \to \mathbb{K}$ et $g : [a, b[ \to \mathbb{R}$ CPM avec g positive, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x \to b}{=} o(g(x)) \\ \displaystyle\int_a^b \mathbf{g} \textit{ diverge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f \underset{x \to b}{=} o\left(\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} g\right)$

2) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x \to b}{=} O(g(x)) \\ \displaystyle\int_a^b \mathbf{g} \textit{ diverge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f \underset{x \to b}{=} O\left(\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} g\right)$

3) **Si** $\begin{cases} f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x) \\ \displaystyle\int_a^b \mathbf{g} \textit{ diverge} \end{cases}$ **alors** $\displaystyle\int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} f \underset{x \to b}{\sim} \int_{\text{[redacted]}}^{\text{[redacted]}} g$

**NB :**

La Proposition 1 et la Proposition 2 sont à adapter au cas de l'intervalle $]a, b]$ où $x \to a$ :

1) Dans la Proposition 1, on aura la comparaison de $\displaystyle\int_a^x f$ et $\displaystyle\int_a^x g$ quand $x \to a$.

2) Dans la Proposition 2, on aura la comparaison de $\displaystyle\int_x^b f$ et $\displaystyle\int_x^b g$ quand $x \to a$.

Fin