

CONCOURS COMMUN SUP 2000

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

Mardi 23 mai 2000 de 08h00 à 12h00

Extrait

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette correspondant à l'épreuve et figurant sur leur convocation.

PROBLÈME D'ANALYSE

- $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$ -algèbre des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ suivants :
$$\mathcal{E} = \{ f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \}.$$

 $\mathcal{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathcal{E}$ tels que :
 - f n'est pas la fonction identiquement nulle.
 - f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

PARTIE I

1. Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.
2. On note ch la fonction cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique. Démontrer la formule : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ch}(x+y) = \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y$.
En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.
3. Soit f dans $\mathcal{E}$; montrer que pour tout réel α , la fonction f_α de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha x)$$
 est dans $\mathcal{E}$.
4. On fixe un élément f de $\mathcal{E}$.
En donnant à x et à y des valeurs particulières, prouver que :
 - a. $f(0)$ vaut 0 ou 1.
 - b. Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.
 - c. Si $f(0) = 1$, alors f est une fonction paire.

PARTIE II

A. On fixe ici un élément f de $\mathcal{F}$ tel que $f(0) = 1$.

1. Montrer que pour chaque réel $r > 0$, on a :

a. $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^r f(x+y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du.$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) \int_0^r f(y)dy = \int_x^{x+r} f(u)du + \int_{x-r}^x f(v)dv.$

2. a. Montrer que l'on peut choisir $r > 0$ de façon à rendre strictement positive la constante $\int_0^r f(y)dy$.

Dans la suite de ce 2., on fixe un réel $r > 0$ qui vérifie : $\int_0^r f(y)dy > 0$.

b. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer alors que f est en fait de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

d. Prouver l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, c f'(x) = f(x+r) - f(x-r).$$

3. En déduire l'existence d'une constante réelle λ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \lambda f(x).$$

B. Conclusion.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' = \mu y$, en séparant les cas : $\mu > 0$, $\mu < 0$ et $\mu = 0$.

2. En déduire tous les éléments de $\mathcal{F}$ en exploitant le L4.c.

3. Donner tous les éléments de $\mathcal{F}$.

PARTIE III

On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ par une méthode différente.

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

Si a est un élément fixé de $\mathbb{R}_+^*$ et si $D_a = \{ a \frac{p}{2^q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \}$,

tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a .

Soit f un élément de $\mathcal{F}$. On pose $E = \{x > 0 / f(x) = 0\}$.

A.

1. Montrer que $f(0) = 1$, et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a .

3. Prouver que $f(a) = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que : $a > 0$.

4. Montrer que : $\forall x \in [0, a[, f(x) > 0$.

B. On pose $\omega = \frac{\pi}{2a}$, et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: $x \mapsto \cos(\omega x)$.

1. a. Soit $q \in \mathbb{N}$; montrer que : $f(\frac{a}{2^q}) + 1 = 2 \left[f(\frac{a}{2^{q+1}}) \right]^2$.

b. En déduire, en raisonnant par récurrence sur q , que : $\forall q \in \mathbb{N}, f(\frac{a}{2^q}) = g(\frac{a}{2^q})$.

On démontrerait de même le résultat suivant que le candidat pourra utiliser librement :

$$\text{si } q \in \mathbb{N} \text{ est fixé : } \forall p \in \mathbb{N}, f(p \frac{a}{2^q}) = g(p \frac{a}{2^q}).$$

2. Prouver que : $\forall x \in D_a, f(x) = g(x)$.

3. En déduire que $f = g$.

C. En déduire tous les éléments de $\mathcal{F}$.

FIN