Correction proposée par El Amdaoui
École Royale de l'Air-Marrakech.Maroc

Problème 1

Partie I

1.1. On montre que Σ_A est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$

- $\Sigma_A \neq \emptyset$ car l'application nulle $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto 0_{n,1} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ appartient à Σ_A
- Soit $F, G \in \Sigma_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition F et G sont deux fois-dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc $\lambda F + G$ est deux fois-dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned}(\lambda F+G)'' &= \lambda F'' + G'' \\ &= \lambda AF + AG \\ &= A(\lambda F + G)\end{aligned}$$

Donc $\lambda F + G \in \Sigma_A$.

1.2. Détermination de la dimension de Σ_A

1.2.1. F est supposé deux-fois dérivable, donc $x_F = \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned} x'_F = Bx_F \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} F' \\ F'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F' &= F' \\ F'' &= AF \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad F'' = AF \end{aligned}$$

Donc l'équivalence demandée $F \in \Sigma_A$ si, et seulement si, $x_F \in \Sigma_B$

1.2.2. L'application Φ est bien définie, d'après la question précédente.

- Φ est linéaire, car pour $F, G \in \Sigma_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda F + G) &= \begin{pmatrix} \lambda F + G \\ (\lambda F + G)' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda F + G \\ \lambda F' + G' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ G' \end{pmatrix} \\ &= \lambda\Phi(F) + \Phi(G)\end{aligned}$$

- Soit $F \in \Sigma_A$, $x_F = 0$ entraîne $\begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix} = 0$, donc $F = 0$. Ainsi Φ est un morphisme injectif
- Soit $x \in \Sigma_B$, on écrit x par bloc $x = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$ avec $F, G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ (F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} x' = Bx \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} F' \\ G' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ AF \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow \quad \begin{cases} F' = G \\ G' = AF \end{cases} \end{aligned}$$

L'égalité $F' = G$ montre que F est deux fois dérivable et $F'' = G' = AF$. Ainsi $x = \begin{pmatrix} F \\ F' \end{pmatrix}$ avec $F \in \Sigma_A$, ceci montre la surjection de Φ

1.2.3. Σ_B est l'ensemble de solutions de l'équation linéaire homogène d'ordre 1 : $x' = Bx$ avec $B : \mathbb{R}^+ \longrightarrow M_{2n,1}(\mathbb{R})$ continue, d'après Cauchy-Lipschitz linéaire, Σ_B est de dimension $2n$ et par isomorphisme $\dim(\Sigma_A) = 2n$

1.3. Soit $(s, v, w) \in \mathbb{R}^+ \times M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a l'équivalence

$$\begin{cases} F'' = AF \\ F(s) = v \text{ et } F'(s) = w \end{cases} \iff \begin{cases} x'_F = Bx_F \\ x_F(s) = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le second système est un problème de Cauchy qui admet, d'après Cauchy-Lipschitz linéaire, une unique solution, donc le premier système admet lui aussi une unique solution

Partie II

2.1.

2.1.1. On a

- $(x, y) \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R}) \longmapsto < x, y > \in \mathbb{R}$ est bilinéaire en dimension finie, donc elle est indéfiniment différentiable
- $x \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \longmapsto (x, x) \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R})$ est linéaire en dim finie, donc elle est indéfiniment différentiable
- $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto F(t) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$

Alors, par composition, $f : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto < F(t), F(t) >$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et par la formule de Leibniz : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2 < F''(t), F(t) > +2 < F'(t), F'(t) > \\ &= 2 < A(t)F(t), F(t) > +2 \parallel F'(t) \parallel^2 \end{aligned}$$

2.1.2. Par hypothèse $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a $< A(t)F(t), F(t) > \geqslant 0$. Donc, d'après la formule précédente $f''(t) \geqslant 0$, ceci montre que f est convexe

2.2. On suppose qu'il existe un couple $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que $t_1 < t_2$ et $F(t_1) = F(t_2) = 0$

2.2.1. Soit $t \in [t_1, t_2]$, alors il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $t = \lambda t_1 + (1 - \lambda) t_2$. D'après l'inégalité de convexité $0 \leqslant f(t) \leqslant \lambda f(t_1) + (1 - \lambda) f(t_2) = 0$, donc $f(t) = 0$

2.2.2. On tire de la question précédente que $F = 0$ sur le segment $[t_1, t_2]$ et pour tout $t \in]t_1, t_2[$, on a $F'(t) = 0$. Alors pour $s \in]t_1, t_2[$, l'application nulle et F sont solutions du système

$$\begin{cases} F'' = AF \\ F(s) = 0 \text{ et } F'(s) = 0 \end{cases}$$

Un tel système n'admet qu'une seule solution, donc $F = 0$

2.3. La fonction f est convexe et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc la courbe de f est située au dessus de ces tangentes, en particulier

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t) \geqslant f'(0)t + f(0)$$

Avec $f'(0) = 2 < F'_v(0), F_v(0) >= 2 \parallel v \parallel^2$, on tire $f(t) \geqslant 2 \parallel v \parallel^2 t + f(0)$, ceci montre que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, puis par composition avec la fonction racine carrée $\parallel F(t) \parallel \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

2.4. Des normes sur Σ_A

2.4.1. Ψ est bien définie et linéaire.
Soit $F \in \mathrm{Ker}(\Psi)$, alors F s'annule en 0 et en $b > 0$, d'après la question **2.2.2** l'application $F = 0$, d'où Ψ est injective. Puisque Σ_A et $M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R})$ ont même dimension $2n$, alors Ψ est un isomorphisme d'espaces vectoriels

2.4.2. L'application $\parallel . \parallel_b$ est bien définie de Σ_A à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

– **Séparation :** Soit $F \in \Sigma_A$.

$$\begin{aligned} \| F \|_b = 0 &\iff \| F(0) \| + \| F(b) \| = 0 \\ &\iff F(0) = F(b) = 0 \\ &\iff F = 0 \quad \text{question } \mathbf{2.2} \end{aligned}$$

– **Homogénéité :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F \in \Sigma_A$:

$$\| \lambda F \|_b = \| \lambda F(0) \| + \| \lambda F(b) \| = |\lambda| \left(\| F(0) \| + \| F(b) \|\right) = |\lambda| \, \| F \|_b$$

– **Inégalité triangulaire :** Soit $F, G \in \Sigma_A$, on a

$$\| F(0) + G(0) \| \leqslant \| F(0) \| + \| G(0) \| \quad \text{et} \quad \| F(b) + G(b) \| \leqslant \| F(b) \| + \| G(b) \|$$

On en déduit que

$$\| F + G \|_b \leqslant \| F \|_b + \| G \|_b$$

Ainsi $\| \,.\, \|_b$ est bien une norme sur Σ_A

2.4.3. L'application $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \| F(t) \| \in \mathbb{R}_+$ est continue, par composition des applications continues F et norme euclidienne, donc elle est bornée sur le segment $[0, b]$ et atteint ses bornes. Donc $\| \,.\, \|_{\infty,b}$ est bien définie de Σ_A à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

– **Séparation :** Soit $F \in \Sigma_A$.

$$\begin{aligned} \| F \|_{\infty,b} = 0 &\iff \forall t \in [0, b]\,,\ F(t) = 0 \\ &\iff F = 0 \quad \text{question } \mathbf{2.2} \end{aligned}$$

– **Homogénéité :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $F \in \Sigma_A$: $\forall t \in [0, b]$

$$\| \lambda F(t) \| = |\lambda| \, \| F(t) \|$$

Donc

$$\| \lambda F \|_{\infty,b} = |\lambda| \, \| F \|_{\infty,b}$$

– **Inégalité triangulaire :** Soit $F, G \in \Sigma_A$, on a : $\forall t \in [0, b]$

$$\| F(t) + G(t) \| \leqslant \| F(t) \| + \| G(t) \| \leqslant \| F \|_{\infty,b} + \| G \|_{\infty,b}$$

On en déduit que

$$\| F + G \|_{\infty,b} \leqslant \| F \|_{\infty,b} + \| G \|_{\infty,b}$$

Ainsi $\| \,.\, \|_{\infty,b}$ est bien une norme sur Σ_A

2.4.4. Σ_A est un espace de dimension finie, alors $\| \,.\, \|_{\infty,b}$ et $\| \,.\, \|_b$ sont équivalentes

Partie III

3.1.

3.1.1. L'application $f_{m,a} : t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \| g_{m,a}(t) \|^2$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, donc $f'_{m,a}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier $\forall t \in [0, m]\,, \quad f'_{m,a}(t) \leqslant f'_{m,a}(m)$.
Or $f'_{m,a}(m) = 2 < g_{m,a}(m), g'_{m,a}(m) >= 0$, donc $f'_{m,a}$ est négative sur $[0, m]$ et par suite la décroissance de $f_{m,a}$. Par la croissance de l'application racine carrée, on tire par composition, que $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \| g_{m,a}(t) \|$ est décroissante sur $[0, m]$

3.1.2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a $1 \in [0, m]$, par décroissance de l'application $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \| g_{m,a}(t) \|$ sur $[0, m]$, on a $\| g_{m,a}(1) \| \leqslant \| g_{m,a}(0) \| = \| a \|$. Par définition de la norme $\| \,.\, \|_1$, on a $\| g_{m,a} \|_1 = \| g_{m,a}(0) \| + \| g_{m,a}(1) \| \leqslant 2 \| a \|$. La suite $(g_{m,a})_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de l'espace $(\Sigma_A, \| \,.\, \|_1)$

3.1.3. La suite $(g_{m,a})_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de l'espace $(\Sigma_A, \| \,.\, \|_1)$ qui est de dimension finie. D'après Bolzano Weiestrass il existe une suite extraite $\left(g_{\sigma(m),a}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ convergente dans $(\Sigma_A, \| \,.\, \|_1)$ et notons g_a sa limite

3.2.

3.2.1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^+$, alors il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $K \subset [0, b]$ et

$$\left\| g_{\sigma(m),a} - g_a \right\|_{\infty,K} \leqslant \left\| g_{\sigma(m),a} - g_a \right\|_b$$

En outre $\| \, . \, \|_1$ et $\| \, . \, \|_b$ sont équivalentes et puisque $\left(g_{\sigma(m),a}\right)$ converge vers g_a pour la norme $\| \, . \, \|_1$, alors la convergence de la suite $\left(g_{\sigma(m),a}\right)$ vers g_a pour la norme $\| \, . \, \|_b$ est assurée puis sa convergence vers g_a sur tout compact K de $\mathbb{R}^+$

3.2.2. La convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ entraîne la convergence simple. Comme pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $g_{\sigma(m),a}(0) = a$, alors par passage à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient $g_a(0) = a$.
En outre pour $t, t' \in \mathbb{R}_+$ tels que $t < t'$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $\sigma(m_0) > t'$, alors pour tout $m \geqslant m_0$, on a $t, t' \in [0, \sigma(m)]$ et comme $g_{\sigma(m),a}$ est décroissante sur $[0, \sigma(m)]$, on obtient

$$\left\| g_{\sigma(m),a}(t') \right\| \leqslant \left\| g_{\sigma(m),a}(t) \right\|$$

On fait tendre m vers $+\infty$, donc $\| g_a(t') \| \leqslant \| g_a(t) \|$. Ainsi $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \| g_a(t) \|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

3.2.3. g_a est un élément de Σ_A et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\| g_a(t) \| \leqslant \| g_a(0) \| = \| a \|$, donc g_a est une solution bornée de l'équation (1)

3.3.

3.3.1. D'après la question **3.2.3.** les fonctions $g_{e_1}, \cdots, g_{e_n}$ sont solutions bornées de l'équation différentielle (1). Un élément de Σ_1 est combinaison linéaire des fonctions bornées, donc il est borné

3.3.2. La famille $(g_{e_1}, \cdots, g_{e_n})$ est génératrice de Σ_1, donc il suffit de montrer que cette famille est libre. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{e_i}$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{e_i}(t) = 0$, en particulier pour tout $t = 0$, on trouve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, et donc les scalaires $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ car $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi la liberté de la famille $(g_{e_1}, \cdots, g_{e_n})$

3.3.3. On considère l'application

$$\zeta : \left\{ \begin{array}{ccc} \Sigma_A & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R}) \\ F & \longmapsto & (F(0), F'(0)) \end{array} \right.$$

ζ est un morphisme d'espaces vectoriels et d'après **1.3** l'application ζ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Or $\Delta = \{(v, v) \mid v \in M_{n,1}(\mathbb{R})\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension n, donc $\Sigma_2 = \zeta^{-1}(\Delta)$ est un sous-espace vectoriel de Σ_A de dimension n

3.3.4. Soit $F \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{e_i}$ et $F(0) = F'(0)$.
La combinaison $F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_{e_i}$ montre que F est bornée, d'après la question **2.3**, le vecteur $v = F(0) = F'(0)$ est forcément nul. Puis par unicité de la solution $F = 0$. Autrement dit $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{0\}$ et puisque $\dim \Sigma_1 + \dim \Sigma_2 = 2n = \dim \Sigma_A$, alors

$$\Sigma_A = \Sigma_1 \oplus \Sigma_2$$

3.3.5.
- Σ_1 est un sous-espace vectoriel de Σ_A de dimension finie, donc Σ_1 est un fermé de Σ_A et par suite $\Sigma_A \setminus \Sigma_1$ est un ouvert de Σ_A
- Soit $F \in \Sigma_A$. Puisque Σ_1 est un sous-espace vectoriel strict de Σ_A il existe $G \in \Sigma_A \setminus \Sigma_1$. On considère alors la suite (F_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = F + \dfrac{1}{2^n} G$,

une telle suite est d'éléments de $\Sigma_A \setminus \Sigma_1$ et $\| F_n - F \|_1 = \dfrac{1}{2^n} \| G \|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors par la caractérisation séquentielle $\overline{\Sigma_A \setminus \Sigma_1} = \Sigma_A$

Soit $F \in \Sigma_A$

– D'après la question **3.3.1**, si $F \in \Sigma_1$, alors elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
– Si $F \in \Sigma_A \setminus \Sigma_1$. On écrit $F = F_2 + F_1$ avec $F_2 \in \Sigma_2$ et $F_1 \in \Sigma_1$. Comme $F \notin \Sigma_1$, alors F_2 est non nulle, donc $F_2(0) = F_2'(0) \neq 0$ et par inégalité triangulaire on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \| F(t) \| \geqslant \| F_2(t) \| - \| F_1(t) \|$$

$\| F_2 \|$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et F_1 est bornée, donc $\| F(t) \| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$

Problème 2

Partie I

4.1. On a $I(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $V(k+1) = \{k, k+2\}$, donc $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si, et seulement si,

$$f(k+1) = \frac{1}{2} \sum_{i \in V(k+1)} f(i) = \frac{1}{2}\left(f(k) + f(k+2)\right)$$

si, seulement si

$$f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0$$

4.2. L'ensemble des fonctions harmoniques sont exactement l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant l'équation $f(k+2) - 2f(k+1) + f(k) = 0$ d'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$. Cette dernière admet racine double $r = 1$, donc f est harmonique si, et seulement si, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k) = ak + b$$

Posons $\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}} : x \in \mathbb{Z} \longmapsto x \in \mathbb{R}$ et $1_{\mathbb{Z}} : x \in \mathbb{Z} \longmapsto 1 \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble des fonctions harmoniques est l'espace $\mathbf{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}}\right)$ qui est de dimension 2 et dont une base $\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}}\right)$

4.3. Montrons d'abord que $I(\mathbb{Z}^*) = \{k \in \mathbb{Z} \ , \ |k| \geqslant 2\}$.
Soit $k \in \{k \in \mathbb{Z} \ , \ |k| \geqslant 2\}$, alors $V(k) = \{k-1, k+1\} \subset \mathbb{Z}^*$, donc l'inclusion $\{k \in \mathbb{Z} \ , \ |k| \geqslant 2\} \subset I(\mathbb{Z}^*)$.
Inversement $k \in \mathbb{Z}^* \setminus \{k \in \mathbb{Z} \ , \ |k| \geqslant 2\}$, alors $k = 1$ ou $k = -1$, or $V(-1) = \{-2, 0\} \not\subset \mathbb{Z}^*$ et $V(1) = \{2, 0\} \not\subset \mathbb{Z}^*$, donc $k \notin I(\mathbb{Z}^*)$.
f harmonique sur $I(\mathbb{Z}^*)$ si, et seulement si,

$$\forall n \geqslant 1, \quad f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0 \tag{1}$$

et

$$\forall n \leqslant -1, \quad f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0 \tag{2}$$

Comme auparavant, l'équation (1) montre qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant 2, \quad f(n) = an + b$ et l'équation (2) montre qu'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \leqslant -2, \quad f(n) = cn + d$. Bref l'ensemble des fonctions harmonique est l'espace $\mathbf{Vect}\left(\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\chi_{[\![2,+\infty[\![}, \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}\chi_{]\!]-\infty,-2]\!]}, \chi_{[\![2,+\infty[\![}, \chi_{]\!]-\infty,-2]\!]}\right)$ qui est de dimension 4.

4.4.

4.4.1. Soit $\ell \in V(k)$. Par hypothèse f est positive, donc

$$f(\ell) \leqslant \sum_{x \in V(k)} f(x) = 2df(k)$$

4.4.2. Soit $k \in \mathbb{Z}^d$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $\ell \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\|\ell - k\|_1 = n$, on a $f(\ell) \leqslant 2d^{\|\ell - k\|_1} f(k)$

- Pour $n = 0$, c'est évident et pour $n = 1$ c'est fait dans la question précédente
- Soit $n \geqslant 1$ et soit $\ell \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\|\ell - k\|_1 = n+1$. Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} |\ell_i - k_i| = \|\ell - k\|_1 > 0$, alors il existe $i_0 \in [\![1, d]\!]$ tel que $\ell_{i_0} \neq k_{i_0}$. On pose alors $\varepsilon_{i_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell_{i_0} < k_{i_0} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ et ℓ' obtenu de ℓ en remplaçant ℓ_{i_0} par $\ell_{i_0} + \varepsilon_{i_0}$. On a bien

  $$\|\ell - \ell'\|_1 = 1 \quad \text{et} \quad \|\ell' - k\|_1 = n$$

  Par hypothèse de récurrence $f(\ell) \leqslant 2df(\ell')$ et $f(\ell') \leqslant (2d)^n f(k)$. On combine les deux inégalités $f(\ell) \leqslant (2d)^{n+1} f(k)$

4.4.3. S'il existe $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $f(k)=0$, alors, par positivité de f, on a pour tout $\ell \in \mathbb{Z}^d$:

$$0 \leqslant f(\ell) \leqslant (2d)^{\| \ell-k \|_1} f(k) = 0$$

Donc $f=0$

4.4.4. f étant non nulle, d'après la question précédente, elle ne s'annule jamais. Pour $\ell, k \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\begin{aligned} f(\ell) \leqslant (2d)^{\| \ell-k \|_1} f(k) &\Longrightarrow \frac{f(\ell)}{f(k)} \leqslant (2d)^{\| \ell-k \|_1} \\ &\Longrightarrow \ln(f(\ell)) - \ln(f(k)) \leqslant \| \ell-k \|_1 \ln(2d) \end{aligned}$$

Par symétrie, on a aussi $\ln(f(k)) - \ln(f(\ell)) \leqslant \| k-\ell \|_1 \ln(2d)$. Ainsi

$$|\ln(f(\ell)) - \ln(f(k))| \leqslant \| \ell-k \|_1 \ln(2d)$$

Partie II

5.1

5.1.1. Remarquons d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1}-Y_n = \mathbf{sgn}(X_n)\, e_{[|X_n|]}$, donc $\| Y_{n+1}-Y_n \|_1 = \left\| \mathbf{sgn}(X_n)\, e_{[|X_n|]} \right\|_1 = 1$. Ainsi par télescopage et inégalité triangulaire, pour tout $n \geqslant 1$

$$\| Y_n \|_1 = \left\| \sum_{k=0}^{n-1} (Y_{k+1}-Y_k) \right\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \| Y_{k+1}-Y_k \|_1 = n$$

Une telle égalité est vraie pour $n=0$. On tire donc

$$|g(Y_n)| \leqslant \exp(a \| Y_n \|_1 + b) \leqslant \exp(an+b)$$

5.1.2. Soit $\omega \in \Omega$, on a

$$|g(Y_U)(\omega)| = \left| g\left(Y_{U(\omega)}\right) \right| \leqslant \exp(aU(\omega)+b) = \exp(aU+b)(\omega)$$

Donc $|g(Y_U)| \leqslant \exp(aU+b)$. D'autre part $\sum\limits_{n \geqslant 0} e^{an+b}\mathbb{P}(U=n)$ est une SATP convergente car

$$e^{an+b}\mathbb{P}(U=n) = e^{an+b}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \frac{(e^a\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda+b}$$

et $\left(\dfrac{(e^a\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda+b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. Par comparaison $|g(Y_U)|$ admet un espérance et

$$\mathbb{E}(|g(Y_U)|) \leqslant \mathbb{E}(\exp(aU+b))$$

Enfin

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(aU+b)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{an+b}\mathbb{P}(U=n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^a\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda+b} \\ &= e^{e^a\lambda}e^{-\lambda+b} \\ &= e^{(e^a-1)\lambda+b} \end{aligned}$$

D'ou

$$\mathbb{E}(|g(Y_U)|) \leqslant \exp((e^a-1)\lambda+b)$$

5.1.3. Par le théorème de transfert $g\left(Y_U\right)^2$ admet une espérance si, et seulement si, la famille $\left(g(k)^2\mathbb{P}\left(Y_U=k\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est sommable.

– Montrons que $\mathbb{E}\left(g\left(Y_U\right)^2\right)$ existe.

L'application g^2 est à valeurs réelles vérifiant pour tout $k\in\mathbb{Z}^d$, $g^2(k)\leqslant\exp\left(2a\parallel k\parallel_1+2b\right)$. D'après la question **5.1.2**, $g^2\left(Y_U\right)$ admet une espérance.

– Montrons que la famille $\left(g(k)^2\mathbb{P}\left(Y_U=k\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est sommable.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'après la question **5.1.1.**, on a $\left|g\left(Y_n\right)\right|\leqslant\exp\left(an+b\right)$ soit $\left|g\left(Y_n\right)^2\right|\leqslant\exp\left(2an+2b\right)$ ce qui montre que $g\left(Y_n\right)^2$ admet une espérance et $\mathbb{E}\left(g\left(Y_n\right)^2\right)\leqslant\exp\left(2an+2b\right)$. D'autre part, par le théorème du transfert, la famille $\left(g(k)^2\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est sommable de somme $\mathbb{E}\left(g\left(Y_n\right)^2\right)$
- La famille $\left(\mathbb{E}\left(g\left(Y_n\right)^2\right)\mathbb{P}(U=n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable car pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left(g(Y_n)^2\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\leqslant e^{2an+2b}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\frac{(e^{2a}\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda+2b}$$

et $\left(\dfrac{(e^{2a}\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda+b}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable

Ainsi, par sommation par paquets, la famille $\left(g(k)^2\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\right)_{(k,n)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{N}}$ est sommable. En conséquence, une autre fois par sommation par paquets, on a

- Pour tout $k\in\mathbb{Z}^d$, la famille $\left(g(k)^2\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable de somme S_k

$$\begin{aligned}S_k &= \sum_{n=0}^{+\infty}g(k)^2\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\\ &= g(k)^2\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}\left(Y_n=k,U=n\right)\\ &= g(k)^2\mathbb{P}\left(Y_U=k\right)\end{aligned}$$

- La famille $\left(g(k)^2\mathbb{P}\left(Y_U=k\right)\right)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ est sommable.

Enfin, par le théorème du transfert,

$$\mathbb{E}\left(g\left(Y_U\right)^2\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}g(k)^2\mathbb{P}\left(Y_U=k\right)$$

5.2.

5.2.1. Soit $j\in\mathbb{N}$, d'après la question **5.1.1.**, on a $f^2\left(Y_j\right)\leqslant\exp\left(j\ln\left(2d\right)\right)$, donc $f\left(Y_j\right)$ admet un moment d'ordre 2. En outre, d'après la question **5.1.3.**, la variable $f\left(Y_U\right)$ admet un moment d'ordre 2. Les deux familles $\left(f(k)^2\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\right)_{(k,n)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{N}}$ et $\left(f(k)\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\right)_{(k,n)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{N}}$ sont sommables, en conséquence :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(f\left(Y_U\right)^2\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}f(k)^2\mathbb{P}\left(Y_U=k\right)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n=0}^{+\infty}f(k)^2\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}f(k)^2\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(f(Y_n)^2)\mathbb{P}\left(U=n\right)\\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{E}\left(f(Y_n)^2\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(Y_U\right)\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(k)\mathbb{P}\left(Y_U=k\right)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{n=0}^{+\infty} f(k)\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(k)\mathbb{P}\left(Y_n=k\right)\mathbb{P}\left(U=n\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{E}(f(Y_n))\mathbb{P}\left(U=n\right)\\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{E}\left(f(Y_n)\right)
\end{aligned}$$

5.2.2. Montrons que la suite $\left(\mathbb{E}\left(f\left(Y_n\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Soit $n\in\mathbb{N}$, on a $Y_{n+1}=Y_n+\mathbf{sgn}(X_n)e_{[|X_n|]}$, donc l'ensemble des valeurs prises par Y_{n+1} est

$$Y_{n+1}\left(\Omega\right)=\bigcup_{\alpha\in Y_n(\Omega)}V(\alpha)$$

Par le théorème du transfert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(Y_{n+1}\right)\right) &= \sum_{k\in\bigcup\limits_{\alpha\in Y_n(\Omega)}V(\alpha)} f(k)\mathbb{P}\left(Y_{n+1}=k\right)\\
&= \sum_{\alpha\in Y_n(\Omega)}\sum_{k\in V(\alpha)} f(k)\mathbb{P}\left(Y_{n+1}=k\right)\\
&= \sum_{\alpha\in Y_n(\Omega)}\sum_{i\in D_d} f\left(\alpha+\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)\mathbb{P}\left(Y_{n+1}=\alpha+\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)\\
&= \sum_{\alpha\in Y_n(\Omega)}\sum_{i\in D_d} f\left(\alpha+\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)\mathbb{P}\left(Y_n=\alpha,X_n=i\right)
\end{aligned}$$

Y_n est une variable aléatoire en fonction de $X_1,\cdots,X_{n-1}$, or la suite (X_n) est une suite de variables indépendantes, alors Y_n et X_n sont indépendantes, donc

$$\mathbb{P}\left(Y_n=\alpha,X_n=i\right)=\mathbb{P}\left(Y_n=\alpha\right)\mathbb{P}\left(X_n=i\right)=\frac{1}{2d}\mathbb{P}\left(Y_n=\alpha\right)$$

Avec $\mathbb{P}\left(X_n=i\right)=\dfrac{1}{2d}$ puisque X_n suit la loi uniforme sur l'ensemble D_d, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(f\left(Y_{n+1}\right)\right) &= \sum_{\alpha\in Y_n(\Omega)}\sum_{i\in D_d}\frac{1}{2d}f\left(\alpha+\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)\mathbb{P}\left(Y_n=\alpha\right)\\
&= \sum_{\alpha\in Y_n(\Omega)}\mathbb{P}\left(Y_n=\alpha\right)\frac{1}{2d}\sum_{i\in D_d} f\left(\alpha+\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)\\
&= \sum_{\alpha\in Y_n(\Omega)} f(\alpha)\mathbb{P}\left(Y_n=\alpha\right)\\
&= \mathbb{E}\left(f\left(Y_n\right)\right)
\end{aligned}$$

On conclut que la suite $\left(\mathbb{E}\left(f\left(Y_n\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, avec $\mathbb{E}\left(f\left(Y_0\right)\right)=\mathbb{E}(1)=1$
D'après l'expression de $\mathbb{E}\left(f\left(Y_U\right)\right)$ dans la question précédente, on déduit

$$\mathbb{E}\left(f\left(Y_U\right)\right)=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{E}\left(f(Y_n)\right)=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=1$$

5.3. • $H \neq \emptyset$ car l'application nulle appartient à H.
Soit $f, g \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(f+g)^2(Y_U) = f(Y_U)^2 + 2f(Y_U)g(Y_U) + g(Y_U)^2 \leqslant 2\left(f(Y_U)^2 + g(Y_U)^2\right)$$

Par comparaison $(f+g)^2(Y_U)$ admet une espérance . De plus $(\lambda f)^2(Y_U)$ admet une espérance, donc H est un espace vectoriel réel

• S est bien définie car pour tout $f_1, f_2 \in H$, on a

$$|f_1 f_2| \leqslant f_1^2 + f_2^2$$

Donc $f_1(Y_U)f_2(Y_U)$ admet une espérance, ainsi S est bien définie

– S est symétrique, bilinéaire et positive

– Soit $f \in H$ tel que $S(f, f) = 0$.
On montre d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in Y_n(\Omega), \mathbb{P}(Y_n = k) \neq 0$.

▷ Pour $n = 0$, on a $Y_0(\Omega) = \{0\}$ et $\mathbb{P}(Y_0 = 0) = 1$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in Y_{n+1}(\Omega)$. Or $Y_{n+1}(\Omega) = \bigcup_{x \in Y_n(\Omega)} V(x)$, alors on pose $x_1, \cdots, x_p$ les éléments de $Y_n(\Omega)$ pour lesquels $k \in v(x_i)$, donc

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(Y_n = x_i) > 0$$

Récurrence achevée.
Soit $k \in \mathbb{Z}^d$ et soit $n = \| k \|_1$, on a $k \in Y_n(\Omega)$ et par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_U = k) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_m = k)\mathbb{P}(U = m) \\ &\geqslant \mathbb{P}(Y_n = k)\mathbb{P}(U = n) > 0 \end{aligned}$$

Enfin, la formule de la question **5.1.3** donne $\mathbb{E}\left(f(Y_U)^2\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k)^2 \mathbb{P}(Y_U = k) = 0$ et par suite $\forall k \in \mathbb{Z}^d,\ f(k) = 0$

5.4.

5.4.1. Soit $k \in \mathbb{Z}^d$, puisque m est harmonique sur $\mathbb{Z}^d$, alors

$$\begin{aligned} f_i(k) &= \frac{1}{m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)} m\left(k + \mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right) \\ &= \frac{1}{m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)} \frac{1}{2d} \sum_{x \in V(k)} m\left(x + \mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{x \in V(k)} \frac{m\left(x + \mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)}{m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)} \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{x \in V(k)} f_i(x) \end{aligned}$$

f_i est positive car m l'est, en outre $f_i(0) = 1$

5.4.2. Soit $x \in \mathbb{Z}^d$, on a $V(x) = \left\{x + \mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\ ,\ i \in D_d\right\}$, alors

$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{1}{2d} \sum_{k \in V(x)} m(k) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{i \in D_d} m\left(x + \mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{i \in D_d} m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right) f_i(x) \\ &= \sum_{i \in D_d} \frac{m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)}{2d} f_i(x) \end{aligned}$$

Alors $m = \displaystyle\sum_{i\in D_d} \frac{m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)}{2d} f_i$; les coefficients d'une telle combinaison sont positifs et de somme $\displaystyle\sum_{i\in D_d} \frac{m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)}{2d} = m(0) = 1$

5.4.3. • Par inégalité triangulaire

$$\| m \|_2 \leqslant \sum_{i\in D_d} \frac{m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)}{2d} \| f_i \|_2 \leqslant \sum_{i\in D_d} \frac{m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right)}{2d} \| m \|_2 = \| m \|_2$$

Alors $\forall i \in D_d, \quad \| m \|_2 = \| f_i \|_2$. D'autre part l'inégalité triangulaire est une égalité et comme pour tout $i \in D_d, m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right) f_i \neq O$, alors pour tout $j \in D_i$ il existe $\lambda_{j,i} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\dfrac{m\left(\mathbf{sgn}(j)e_{[|j|]}\right)}{2d} f_j = \lambda_{j,i} f_i$ et l'application m s'exprime $m = \left(\displaystyle\sum_{j\in D_d} \lambda_j\right) f_i$. Enfin comme $m(0) = f_i(0) = 1$, alors on tire $\displaystyle\sum_{j\in D_d} \lambda_{j,i} = 1$, puis $m = f_i$.

• Montrons que $\forall i \in D_d$, $m\left(\mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}\right) = 1$.
Soit $i \in D_d$, on pose $\alpha_i = \mathbf{sgn}(i)e_{[|i|]}$. On a $\alpha_{-i} = -\alpha_i$ et pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned} m(x) &= m(x - \alpha_i + \alpha_i) \\ &= m(x - \alpha_i)m(\alpha_i) \\ &= m(x + \alpha_{-i})m(\alpha_i) \\ &= m(x)m(\alpha_{-i})m(\alpha_i) \end{aligned}$$

Donc $m(\alpha_{-i})m(\alpha_i) = 1$, ceci donne l'inégalité

$$m(\alpha_{-i}) + m(\alpha_i) = \frac{1}{m(\alpha_i)} + m(\alpha_i) = \frac{1 + m(\alpha_i)^2}{m(\alpha_i)} \geqslant 2$$

D'autre part

$$2d \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i) + m\left(\alpha_{-i}\right)\right] = \sum_{i\in D_d} m\left(\alpha_i\right) = 2d.m(0) = 2d$$

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $m(\alpha_i) + m\left(\alpha_{-i}\right) = 2$. Le système $\begin{cases} m(\alpha_i)m(\alpha_{-i}) = 1 \\ m(\alpha_i) + m(\alpha_{-i}) = 2 \end{cases}$ donne $m(\alpha_i) = m\left(\alpha_{-i}\right) = 1$.

• Montrons par récurrence sur n que $\forall k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\| k \|_1 = n$, $m(k) = 1$
– Pour $n = 0$, c'est trivial car $m(0) = 1$
– Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\| k \|_1 = n + 1$. Alors il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $k_{i_0} \neq 0$, on pose alors $\varepsilon_{i_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } k_{i_0} > 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ et x obtenu de k en remplaçant k_{i_0} par $k_{i_0} - \varepsilon_{i_0}$. On a bien

$$\| x \|_1 = n \quad \text{et} \quad k = x + \varepsilon_{i_0} e_{[|i_0|]}$$

Par hypothèse de récurrence $m\left(x\right) = 1$ et d'après ce qui précède

$$m\left(k\right) = m\left(x + \varepsilon_{i_0} e_{[|i_0|]}\right) = m\left(x\right) = 1$$

5.5. D'après le théorème de Huygens Kœnig,

$$\mathbb{V}\left(f\left(Y_U\right)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(Y_U\right)^2\right) - \mathbb{E}\left(f\left(Y_U\right)\right)^2$$

Avec $\mathbb{E}\left(f\left(Y_U\right)\right) = 1$ et $\mathbb{E}\left(f\left(Y_U\right)^2\right) \leqslant \mathbb{E}\left(m\left(Y_U\right)^2\right)$, on obtient

$$\mathbb{V}\left(f\left(Y_U\right)\right) \leqslant \mathbb{E}\left(m\left(Y_U\right)^2\right) - 1$$

On montre que $f = 1$.
On a déjà démontré que $m = 1$, donc $E\left(m\left(Y_U\right)^2\right) = 1$, puis par l'inégalité précédente $\mathbb{V}\left(f\left(Y_U\right)\right) = 0$. Or $\mathbb{E}\left(f\left(Y_U\right)\right) = 1$ et

$$\| f - 1 \|_2^2 = \mathbb{E}\left(\left(f - 1\right)\left(Y_U\right)^2\right) = \mathbb{V}\left(f\left(Y_U\right)\right) = 0$$

Alors $f - 1 = 0$, puis $f = 1$

5.6. Soit $f : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique

– Si f est minorée, on choisit un minorant α de f qui soit inférieur strictement à $f(0)$ et on considère l'application
$$\varphi = \frac{f - \alpha}{f(0) - \alpha}$$
$\varphi : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction harmonique vérifiant $\varphi(0) = 1$, donc elle est constante et égale 1, c'est-à-dire $f = f(0)$

– Si f est majorée, on choisit un majorant α de f qui soit supérieur strictement à $f(0)$ et on considère l'application
$$\psi = \frac{f - \alpha}{f(0) - \alpha}$$
$\psi : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction harmonique vérifiant $\psi(0) = 1$, donc elle est constante et égale 1, c'est-à-dire $f = f(0)$