

Travaillez ce qui est marqué

La solution est en bas

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'application Φ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- 2) $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$. Considérons l'application Ψ définie par :

$$\forall f, g \in E, \Psi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$$

Montrer que Ψ est un produit scalaire sur E .

Exercice 2

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Notons $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = \text{vect}(e_1, e_2)$

- 1) Déterminer une base orthonormale de F .
- 2) Déterminer $d(x, F)$, où $x = (1, 1, 1, 1)$

Exercice 3

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = \text{tr}({}^t A.B)$$

- 1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
- 2) Montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$$

Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que $\ker(A) = \ker({}^t A.A)$
- 2) En déduire que :
 - a) $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A.A) = \text{rg}(A.{}^t A)$
 - b) $\text{Im}(A) = \text{Im}(A.{}^t A)$

Exercice 5

$E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q : x - y + z = 0$$

- 1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $P_Q(x, y, z)$; la projection orthogonale de (x, y, z) sur Q .
- 2) Calculer $d(A, Q)$, où $A = (-1, 2, 1)$.

Exercice 6

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- 1) a un vecteur non nul de E et $D = \text{vect}(a)$.
Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D .
- 2) Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur ; c-à-d $H = (\text{vect}(a))^\perp$.
Expliciter $P_H(x)$.
- 3) $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.
 Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q : x - y + z = 0$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Déterminer $P_Q(x, y, z)$; la projection orthogonale de (x, y, z) sur Q .
Comparer avec le résultat trouvé dans : [Exercice 5. 1](#)).

Exercice 7

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = \text{tr}({}^t A.B)$

$$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\} . F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$
b) Déterminer $d(A, H)$.
- 2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
b) Déterminer une base de $F^\perp$
c) Déterminer la projection orthogonale de A sur $F^\perp$

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Exercice 1

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons l'application Φ définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

i) Montrons que ϕ est symétrique

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. M. que $\phi(P, Q) = \phi(Q, P)$.

On a :

$$\begin{aligned}\phi(P, Q) &= \sum_{k=0}^n P(k) Q(k) \\ &= \sum_{k=0}^n Q(k) P(k) \\ &= \phi(Q, P)\end{aligned}$$

ii) Montrons que ϕ est linéaire par rapport à la 1^{ère} place.

Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

M. que $\phi(\lambda P + Q, R) = \lambda \phi(P, R) + \phi(Q, R)$

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + Q, R) &= \sum_{k=0}^n (\lambda P(k) + Q(k)) R(k) \\ &= \sum_{k=0}^n (\lambda P(k) R(k) + Q(k) R(k))\end{aligned}$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^n P(k) R(k) + \sum_{k=0}^n Q(k) R(k)$$

$$= \lambda \phi(P, R) + \phi(Q, R)$$

iii) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. M. que $\phi(P, P) \geq 0$

On a :

$$\phi(P, P) = \sum_{k=0}^n (P(k))^2 \geq 0.$$

iv) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\phi(P, P) = 0$.

M. que $P=0$

On a $\phi(P, P) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n (P(k))^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{0, \dots, n\}, (P(k))^2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Somme nulle de} \\ \text{nombres positifs} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{0, \dots, n\}, P(k) = 0$$

$$\Rightarrow P=0, \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} P \text{ possède } (n+1) \text{ racines distinctes} \\ \deg(P) \leq n \end{array} \right.$$

Enfin, de i), ii), iii) et iv) on tire que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

2) $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$. Considérons l'application Ψ définie par :

$$\forall f, g \in E, \Psi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$$

Montrer que Ψ est un produit scalaire sur E .

i) Montrons que Ψ est symétrique

Soient $f, g \in E$. M. que $\Psi(f, g) = \Psi(g, f)$.

On a :

$$\Psi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$$

$$= \int_{-1}^1 g(t)f(t)(1-t^2)dt$$

$$= \Psi(g, f)$$

$$\Psi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$$

ii) Montrons que Ψ est linéaire par rapport à la 1^{ère} place

Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

M. que $\Psi(\lambda f + g, h) = \lambda \Psi(f, h) + \Psi(g, h)$.

On a :

$$\Psi(\lambda f + g, h) = \int_{-1}^1 (\lambda f(t) + g(t))h(t)(1-t^2)dt$$

$$= \int_{-1}^1 (\lambda f(t)h(t)(1-t^2) + g(t)h(t)(1-t^2))dt$$

$$= \lambda \int_{-1}^1 f(t) h(t) (1-t^2) dt + \int_{-1}^1 g(t) h(t) (1-t^2) dt$$

$$= \lambda \Psi(f, h) + \Psi(g, h)$$

$$\Psi(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1-t^2)dt$$

iii) Soit $f \in E$. M. que $\Psi(f, f) \geq 0$

On a :

$$\Psi(f, f) = \int_{-1}^1 f^2(t) (1-t^2) dt \geq 0 \text{ car } (\forall t \in [-1, 1], f^2(t)(1-t^2) \geq 0)$$

iv) Soit $f \in E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ telle que $\Psi(f, f) = 0$.

M. que $f = 0$; car $\boxed{\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0}$.

On a $\Psi(f, f) = 0$.

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f^2(t) (1-t^2) dt = 0$$

$$\text{On } \begin{cases} \forall t \in [-1, 1], f^2(t) (1-t^2) \geq 0 \\ \int_{-1}^1 f^2(t) (1-t^2) dt = 0 \\ \text{La fonction } t \mapsto f^2(t) (1-t^2) \text{ est continue sur } [-1, 1] \end{cases}$$

$$\text{Alors } (\forall t \in [-1, 1], f^2(t) (1-t^2) = 0)$$

$$\Rightarrow \forall t \in]-1, 1[, \underbrace{f^2(t) (1-t^2)}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in]-1, 1[, f^2(t) = 0$$

$$\Rightarrow \forall t \in]-1, 1[, f(t) = 0$$

$$\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0$$

Par passage aux limites on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} f(t) &= \lim_{t \rightarrow -1} f(t) = 0 \\ &= f(1) \quad \text{car } f \text{ continue en } 1 \\ &= f(-1) \quad \text{car } f \text{ continue en } -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(1) = 0 \text{ et } f(-1) = 0$$

Par suite :

$$\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0$$

Enfin, de i), ii), iii) et iv) on tire que ψ est un produit scalaire sur E .

Fin Exercice 1

Exercice 2

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Notons $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = \text{vect}(e_1, e_2)$

1) Déterminer une base orthonormale de F .

(e_1, e_2) une base de F ; espace euclidien muni du produit scalaire

noté: $\langle (x, y, z, t) | (x', y', z', t') \rangle = xx' + yy' + zz' + tt'$

À partir de la base (e_1, e_2) de F , on construit une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ grâce au procédé de Gram-Schmidt suivant:

i) $\varepsilon_1 = ?$

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\text{On a } \|e_1\| = \sqrt{\langle e_1 | e_1 \rangle} \quad ; \quad e_1 = (1, 0, 1, 0)$$
$$= \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0)}$$

ii) $\varepsilon_2 = ?$

$$\varepsilon_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} ; \text{ où } v_2 = e_2 - \underbrace{\langle e_2 | \varepsilon_1 \rangle}_{\substack{\downarrow \\ (1, -1, 1, -1)}} \cdot \underbrace{\varepsilon_1}_{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0)}}$$

On trouve $U_2 = (0, -1, 0, -1)$

et donc $\|U_2\| = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 0, -1)$$

Enfin :

(E_1, E_2) est une base orthonormée de F , où :

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0) \text{ et } E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 0, -1)$$



$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Notons $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = \text{vect}(e_1, e_2)$

1) Déterminer une base orthonormale de F .

2) Déterminer $d(x, F)$, où $x = (1, 1, 1, 1)$

$$d(x, F) = \|x - P_F(x)\| \text{ ; où } P_F(x) \text{ la projection orthogonale}$$

de x sur F .

$$\text{On a } P_F(x) = \langle x | \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle x | \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2, \text{ car } (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ est une base de } F.$$

$$\left(\begin{array}{l} x = (1, 1, 1, 1) \\ \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1, 0) \end{array} \right) \Rightarrow \langle x | \varepsilon_1 \rangle = \sqrt{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} x = (1, 1, 1, 1) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 0, -1) \end{array} \right) \Rightarrow \langle x | \varepsilon_2 \rangle = -\sqrt{2}$$

$$\text{On aura : } P_F(x) = (1, 1, 1, 1) = x$$

Avec $d(x, F) = \|x - P_F(x)\|$, on a enfin

$$d(x, F) = 0$$

□

Fin Exercice 2

Exercice 3

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = \text{tr}({}^t A \cdot B)$$

- 1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

1)a) Il s'agit d'un produit scalaire ; en effet :

ii) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est symétrique ?

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B)$$

$$= \text{tr}({}^t ({}^t A \cdot B))$$

$$= \text{tr}({}^t B \cdot {}^t ({}^t A))$$

$$= \text{tr}({}^t B \cdot A)$$

$$= \langle B|A \rangle$$

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B)$$

iii) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la 1^{ère} place ?

Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{M. que } \langle \lambda A + B | C \rangle = \lambda \langle A | C \rangle + \langle B | C \rangle$$

$$\langle A|B \rangle = \text{tr}({}^t A \cdot B)$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda A + B | C \rangle &= \text{tr}({}^t(\lambda A + B) \cdot C) \\ &= \text{tr}((\lambda {}^t A + {}^t B) C) \quad (\text{linéarité de la transposition}) \\ &= \text{tr}(\lambda {}^t A \cdot C + {}^t B \cdot C) \\ &= \lambda \text{tr}({}^t A \cdot C) + \text{tr}({}^t B \cdot C) \quad (\text{linéarité de la trace}) \\ &= \lambda \langle A | C \rangle + \langle B | C \rangle \end{aligned}$$

iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. M. qm $\langle A | A \rangle \geq 0$.

$$\begin{aligned} \langle A | A \rangle &= \text{tr}({}^t A \cdot A) \\ &= \sum_{i=1}^n ({}^t A \cdot A)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ({}^t A)_{ij} A_{ji} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ji}^2 \right) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ji}^2 \geq 0 \end{aligned}$$

iv) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Supposons que $\langle A | A \rangle = 0$, et montrons que $A = 0$.

$$\text{On a } \langle A | A \rangle = 0 \Rightarrow \text{tr}({}^t A \cdot A) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n ({}^t A \cdot A)_{ii} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n ({}^t A)_{ij} A_{ji} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_{ji}^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ji}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, A_{ji}^2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Somme nulle de} \\ \text{nombres positifs} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, A_{ji} = 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

Conclusion :

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = \text{tr}({}^t A.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

1) b) Montrons que la base canonique (E_{ij}) de $M_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire :

Il s'agit de montrer que :

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, (E_{ij} | E_{ij}) &= 1 \\ \forall (i,j) \neq (k,l), \text{ alors } (E_{ij} | E_{kl}) &= 0 \end{aligned}$$

→ Soit $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$. On a :

$$(E_{ij} | E_{ij}) = \text{tr}({}^t E_{ij} \cdot E_{ij})$$

$$= \text{tr}(E_{ji} E_{ij}) \quad \left({}^t E_{ij} = E_{ji} \right)$$

$$= \text{tr}(\delta_{ii} E_{jj}) \quad \left(\text{car } E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il} \right)$$

$$= \text{tr}(E_{jj})$$

$$= 1$$

→ Supposons que $(i, j) \neq (k, l)$. M. que $(E_{ij} | E_{kl}) = 0$

$$(E_{ij} | E_{kl}) = \text{tr}({}^t E_{ij} \cdot E_{kl})$$

$$= \text{tr}(E_{ji} E_{kl}) \quad \left({}^t E_{ij} = E_{ji} \text{ car} \right)$$

$$= \text{tr}(\delta_{ik} E_{jl})$$

$$= \delta_{ik} \text{tr}(E_{jl}) \quad \left(\text{car tr est linéaire} \right)$$

$$= \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} \quad \left(\text{car } \text{tr}(E_{jl}) = \delta_{jl} \text{ à retenir!} \right)$$

$$\text{Or on a } (i, j) \neq (k, l) \Leftrightarrow (i \neq k \text{ ou } j \neq l)$$

$$\Leftrightarrow \delta_{ik} = 0 \text{ ou } \delta_{jl} = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta_{ik} \delta_{jl} = 0$$

Donc :

$$(E_{ij} | E_{kl}) = 0$$



On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})^2$ par :

$$(A|B) = \text{tr}({}^t A.B)$$

1) Montrer que cette application est un produit scalaire pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

2) Montrer que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), |\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$$

On appliquera l'inégalité de Cauchy - Schwarz.

$$\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \langle y|y \rangle$$

càd

$$|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a :

$$|\text{tr}(A)| = |\text{tr}({}^t I_n \cdot A)|$$

$$= |(I_n|A)|$$

$$\leq \|I_n\| \cdot \|A\|$$

inég - Cauchy Sch

$$= \sqrt{(I_n|I_n)} = \sqrt{\text{tr}({}^t I_n \cdot I_n)} = \sqrt{\text{tr}(I_n)} = \sqrt{n}$$

d'où

$$|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \|A\|$$

Fin Exercice 3

Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\ker(A) = \ker({}^t A A)$

a) $\ker(A) \subset \ker({}^t A A)$?

Soit $X \in \ker(A)$. Montrons que $X \in \ker({}^t A A)$.

On a :

$$\begin{aligned} X \in \ker(A) &\Rightarrow AX = 0 \\ &\Rightarrow {}^t A A X = 0 \\ &\Rightarrow X \in \ker({}^t A A) \end{aligned}$$

D'où $\ker(A) \subset \ker({}^t A A)$

b) $\ker({}^t A A) \subset \ker(A)$?

Soit $X \in \ker({}^t A A)$. Montrons que $X \in \ker(A)$.

On a ${}^t A A X = 0$ et on veut montrer que $AX = 0$.

Clé :

Dans $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, si $X, Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle X | Y \rangle = \sum_{i=1}^n X_i Y_i = {}^t X \cdot Y$$

On a :

$${}^t A A X = 0 \Rightarrow {}^t X {}^t A A X = 0$$

$$\Rightarrow {}^t (AX) \cdot (AX) = 0$$

$$\Rightarrow \|AX\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow AX = 0$$



Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que $\ker(A) = \ker({}^t A A)$
- 2) En déduire que :
 - a) $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A A) = \text{rg}(A {}^t A)$

2) a) i) $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A A)$?

$$\text{On a } \ker(A) = \ker({}^t A A)$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(A)) = \dim(\ker({}^t A A))$$

Et d'après le théorème du rang matriciel, on a :

$$n = \dim(\ker(A)) + \text{rg}(A)$$

$$n = \dim(\ker({}^t A A)) + \text{rg}({}^t A A)$$

2) où $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A A)$ $\square$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que $\ker(A) = \ker({}^t A A)$
- 2) En déduire que :
 - a) $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A A) = \text{rg}(A {}^t A)$?

2) a) ii) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A {}^t A)$?

On vient de montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A A)$.

Mais, en appliquant à ${}^t A$ (à la place de A), on aura :

$$\text{rg}({}^t A) = \text{rg}({}^t({}^t A) {}^t A)$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}({}^t A) = \operatorname{rg}(A \cdot {}^t A)$$

Or $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}({}^t A)$

Alors

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \cdot {}^t A)$$



Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\ker(A) = \ker({}^t A \cdot A)$

2) En déduire que :

a) $\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A \cdot A) = \text{rg}(A \cdot {}^t A)$

b) $\text{Im}(A) = \text{Im}(A \cdot {}^t A)$

2)b) $\text{Im}(A) = \text{Im}(A \cdot {}^t A)$?

On a déjà montré que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A \cdot {}^t A)$

C'est $\dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Im}(A \cdot {}^t A))$.

Alors pour montrer que $\text{Im}(A) = \text{Im}(A \cdot {}^t A)$, il suffit d'établir une inclusion.

Montrons que $\text{Im}(A \cdot {}^t A) \subset \text{Im}(A)$.

Soit $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} X \in \text{Im}(A \cdot {}^t A) &\Rightarrow \exists Y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}), X = A \cdot {}^t A Y \\ &\Rightarrow X \in \text{Im}(A) \quad \square \end{aligned}$$

Fin Exercice 4

Exercice 5

$E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q : x - y + z = 0$$

1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Déterminer $P_Q(x, y, z)$; la projection orthogonale de (x, y, z) sur Q .

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$P_Q(x, y, z) = ?$$

Déterminons d'abord une base de Q .

On a :

$$(x, y, z) \in Q \Leftrightarrow x - y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y - z$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (y - z, y, z)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{vect}((1, 1, 0); (-1, 0, 1))$$

$$\text{Donc } Q = \text{vect}((1, 1, 0); (-1, 0, 1))$$

$((1, 1, 0); (-1, 0, 1))$ est donc une famille génératrice de Q .

Elle est libre, car ses deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Donc $((1, 1, 0); (-1, 0, 1))$ est une base de Q .

Déterminons maintenant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P_Q(x, y, z) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$$

On a :

$$(x, y, z) - P_Q(x, y, z) \in Q^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} ((x, y, z) - P_Q(x, y, z) | (1, 1, 0)) = 0 \\ ((x, y, z) - P_Q(x, y, z) | (-1, 0, 1)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) | (1, 1, 0) = (P_Q(x, y, z) | (1, 1, 0)) \\ (x, y, z) | (-1, 0, 1) = (P_Q(x, y, z) | (-1, 0, 1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) | (1, 1, 0) = (\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) | (1, 1, 0)) \\ (x, y, z) | (-1, 0, 1) = (\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) | (-1, 0, 1)) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \alpha \underbrace{((1, 1, 0) | (1, 1, 0))}_{=2} + \beta \underbrace{((-1, 0, 1) | (1, 1, 0))}_{=-1} \\ -x + z = \alpha \underbrace{((1, 1, 0) | (-1, 0, 1))}_{=-1} + \beta \underbrace{((-1, 0, 1) | (-1, 0, 1))}_{=2} \end{cases}$$

$$(x, y, z) - P_Q(x, y, z) \in Q^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = x + y \\ -\alpha + 2\beta = -x + z \end{cases}$$

Réolvons ce système d'inconnues α et β .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} x+y & -1 \\ -x+z & 2 \end{vmatrix} = x + 2y + z$$

$$\Delta_\beta = \begin{vmatrix} 2 & x+y \\ -1 & -x+z \end{vmatrix} = -x + y + 2z$$

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta} = \frac{1}{3}(x + 2y + z) \text{ et } \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta} = \frac{1}{3}(-x + y + 2z)$$

$$\text{On aait : } P_Q(x, y, z) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$$

$$\Rightarrow P_Q(x, y, z) = \frac{1}{3}(x + 2y + z)(1, 1, 0) + \frac{1}{3}(-x + y + 2z)(-1, 0, 1)$$

$$P_Q(x, y, z) = \frac{1}{3}(2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$$

□

$E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel. Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q : x - y + z = 0$$

1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Déterminer $P_Q(x, y, z)$; la projection orthogonale de (x, y, z) sur Q .

2) Calculer $d(A, Q)$, où $A = (-1, 2, 1)$.

$$d(A, Q) = \|A - P_Q(A)\|$$

$$A = (-1, 2, 1).$$

On a d'après 1) que :

$$P_Q(x, y, z) = \frac{1}{3} (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$$

$$\Rightarrow P_Q(A) = \frac{1}{3} (-1, 4, 5)$$

$$A - P_Q(A) = \dots$$

$$d(A, Q) = \|A - P_Q(A)\| = \dots$$

$d(A, Q) = \star$

Fin Exercice 5

Exercice 6

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1) a un vecteur non nul de E et $D = \text{vect}(a)$.

Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D .

$D = \text{vect}(a)$; où $a \neq 0$.

(a) est une base de D .

$\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ est donc une base orthonormée de D .

Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$P_D(x) = \left\langle x \middle| \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \cdot \frac{a}{\|a\|}$$

$$= \frac{1}{\|a\|^2} \langle x | a \rangle a$$

Enfin :

$$P_D(x) = \frac{\langle x | a \rangle}{\langle a | a \rangle} a ; \text{ où } D = \text{vect}(a).$$



$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1) a un vecteur non nul de E et $D = \text{vect}(a)$.

Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D .

2) Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur ; c-à-d $H = (\text{vect}(a))^\perp$
Expliciter $P_H(x)$.

$$\text{On a } H = (\text{vect}(a))^\perp$$

$$\text{Soit } x \in E, P_H(x) = ?$$

$$\text{On a } E = \underbrace{\text{vect}(a)}_{=D} \oplus \underbrace{(\text{vect}(a))^\perp}_{=H}$$

$$\text{Alors } P_D(x) + P_H(x) = x$$

$$\text{On a } P_D(x) = \frac{\langle x | a \rangle}{\langle a | a \rangle} a$$

$$\text{Alors } P_H(x) = x - \frac{\langle x | a \rangle}{\langle a | a \rangle} a$$



$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1) a un vecteur non nul de E et $D = \text{vect}(a)$.

Expliciter $P_D(x)$, la projection orthogonale de x sur D .

2) Soit H l'hyperplan orthogonal au vecteur ; c-à-d $H = (\text{vect}(a))^\perp$

Expliciter $P_H(x)$.

3) $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.

Q est le plan d'équation cartésienne

$$Q : x - y + z = 0$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Déterminer $P_Q(x, y, z)$; la projection orthogonale de (x, y, z) sur Q .

Comparer avec le résultat trouvé dans : Exercice 5. 1).

$$(x, y, z) \in Q \Leftrightarrow x - y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle (x, y, z) | (1, -1, 1) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) \in (\text{vect}((1, -1, 1)))^\perp$$

D'où : $Q = (\text{vect}((1, -1, 1)))^\perp$; est l'hyperplan orthogonal au

vecteur $(1, -1, 1)$.

$$P_H(x) = x - \frac{\langle x | a \rangle}{\langle a | a \rangle} a$$

$$P_Q(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{\langle (x, y, z) | (1, -1, 1) \rangle}{\langle (1, -1, 1) | (1, -1, 1) \rangle} \cdot (1, -1, 1)$$

$$= (x, y, z) - \frac{x - y + z}{3} \cdot (1, -1, 1)$$

$$P_Q(x, y, z) = \frac{1}{3} (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$$

Et ça coïncide avec le résultat trouvé dans l'exercice 5, 1°)

Fin Exercice 6

Exercice 7

$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = \text{tr}({}^t A.B)$

$$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\} . F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$

$$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\}$$

$$H = \ker(T_r)$$

T_r est une forme linéaire de $M_2(\mathbb{R})$.

$$T_r \neq 0 \text{ Car } T_r(I_2) = 2 \neq 0$$

Ainsi, H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$, comme noyau d'une forme
linéaire non nulle.



$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = \text{tr}({}^t A \cdot B)$

$$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\} . F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$

b) Déterminer $d(A, H)$.

$$d(A, H) = \|A - P_H(A)\| \quad ; \quad P_H(A) = ?$$

Écrivons $A = \underbrace{?}_{\in H} + \underbrace{?}_{\in H^\perp}$, pour tirer $P_H(A)$.

$$\text{On a } M \in H \Leftrightarrow \text{tr}(M) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}({}^t I_2 \cdot M) = 0$$

$$\Leftrightarrow (I_2 | M) = 0$$

$$\Leftrightarrow M \in (\text{vect}(I_2))^\perp$$

$$\text{Donc } H = (\text{vect}(I_2))^\perp$$

$$\text{Et donc } H^\perp = \text{vect}(I_2)$$

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I_2 \in \text{vect}(I_2) = H^\perp} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \text{ker}(\text{tr}) = H}$$

$$\text{Donc } P_H(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d(A, H) = \|A - P_H(A)\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \|I_2\|$$

$$= \sqrt{\text{tr}(^t I_2 \cdot I_2)}$$

$$d(A, H) = \sqrt{2}$$



$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = \text{tr}({}^t A.B)$

$$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\} . F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$
b) Déterminer $d(A, H)$.
- 2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F = \text{Vect} (I_2, J) ; \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où F est un s.v. de $M_2(\mathbb{R})$, (I_2, J) en est une famille génératrice.

(I_2, J) est libre, car I_2 et J ne sont pas colinéaires.

D'où (I_2, J) est une base de F ; où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.



$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = \text{tr}({}^t A.B)$

$$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\} . F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$

b) Déterminer $d(A, H)$.

2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

b) Déterminer une base de $F^\perp$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$M \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (M|I_2) = 0 \\ (M|J) = 0 \end{cases} \quad , \text{ car } (I_2, J) \text{ base de } F$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{noté } K} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{noté } L}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$M \in F^\perp \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(K, L)$$

Donc $F^\perp = \text{Vect}(K, L)$ où $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(K, L) est bien une base de $F^\perp$.



$M_2(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire : $(A|B) = \text{tr}({}^t A.B)$

$$H = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\} . F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) a) Justifier que H est un hyperplan de $M_2(\mathbb{R})$
b) Déterminer $d(A, H)$.
- 2) a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.
b) Déterminer une base de $F^\perp$
c) Déterminer la projection orthogonale de A sur $F^\perp$

$$P_{F^\perp}(A) = ?$$

Plusieurs manières de procéder, voyons par exemple:

Déterminons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P_{F^\perp}(A) = \alpha K + \beta L$

(K, L) est bien une base de $F^\perp$, où $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a :

$$(A - P_{F^\perp}(A)) \in (F^\perp)^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} (A - P_{F^\perp}(A) | K) = 0 \\ (A - P_{F^\perp}(A) | L) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{(A|K)}^{=0} = (P_{F^\perp}(A) | K) \\ \underbrace{(A|L)}_{=2} = (P_{F^\perp}(A) | L) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha \underbrace{(K|K)}_{=2} + \beta \underbrace{(L|K)}_{=0} \\ 2 = \alpha \underbrace{(K|L)}_{=0} + \beta \underbrace{(L|L)}_{=2} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\beta = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$P_{F^\perp}(A) = \alpha K + \beta L \quad \text{deviant in fin}$$

$$P_{F^\perp}(A) = L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Fin Exercice 7

