Développements limités

Exercice 1 :

Déterminer les développements limités suivants :

1) $DL_2(0)$ de $\ln(e^x + \cos x)$
2) $DL_3(0)$ de $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$
3) $DL_3(0)$ de $\ln(\cos(x) + \cos(2x))$
4) $DL_4(0)$ de $\ln(\frac{1}{\cos(x)})$
5) $DL_2(0)$ de $(1+x^3)\sqrt{1-x}$
6) $DL_2(0)$ de $\frac{x}{e^x-1}$
7) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$
8) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3+\cosh(x)}$
9) $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $\sin(x)$
10) $DL_3(0)$ de $\arctan(e^x)$
11) $DL_2(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
12) $DL_2(0)$ de $\frac{\arctan(x)}{\tan(x)}$
13) $DL_2(1)$ de $\frac{x-1}{\ln(x)}$
14) $DL_3(1)$ de $\arctan(x)$
15) $DL_3(0)$ de $\frac{x-\sin(x)}{1-\cosh(x)}$
16) $DL_3(0)$ de $\frac{x\cosh(x)-\sin(x)}{\cosh(x)-1}$
17) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$
18) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$

1) $DL_2(0)$ de $\ln(e^x + \cos x)$

$$e^x + \cos x = 2 + x + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \ln(e^x + \cos x) = \ln(2 + x + o(x^2))$$
$$= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + o(x^2)\right)$$

et $\ln\left(1+\frac{x}{2}+o(x^2)\right)$ est la composée de $\ln(1+x)$ et $\left(\frac{x}{2}+o(x^2)\right)$ Ce qui donne :

$$\ln\left(1+\frac{x}{2}+o(x^2)\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \ln(e^x + \cos \quad = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

2) $DL_3(0)$ de $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$

Piste 1 :

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{1-x} \times \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{1-x} = -1 - x - x^2 - x^3 + o(x^3) \quad (\alpha)$$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3) \quad (\beta)$$

Puis on passe au produit des deux DL dans (α) et (β) on trouve :

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

Piste 2 : $$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x^2+x-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}}$$

et $\frac{1}{1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}}$ est la composée du DL $\frac{1}{1+x}$ et $\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)(x+2)} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

3) $DL_3(0)$ *de* $\ln(\cos(x)+\cos(2x))$

$$\cos x + \cos(2x) = 2 - \frac{5}{2}x^2 + o(x^3).$$

$$\Rightarrow \ln(\cos x + \cos 2x) = \ln\left(2 - \frac{5}{2}x^2 + o(x^3)\right)$$

$$= \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{5x^2}{4} + o(x^3)\right)$$

$\ln\left(1 - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3)\right)$ est la composeé de $\ln(1+x)$ et $\left(-\frac{5}{4}x^2 + o(x^3)\right)$

$$\Rightarrow \ln\left(1 - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3)\right) = -\frac{5}{4}x^2 + o(x^3)$$

D'où $\ln(\cos x + \cos 2x) = \ln 2 - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3)$

4) $DL_4(0)$ *de* $\ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$

$$\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\ln(\cos x)$$

$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$ qu'est la composée de $\ln(1+x)$ et $\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$; Ce qui donne :

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

5) $DL_2(0)$ *de* $(1+x^3)\sqrt{1-x}$

$$\sqrt{1-x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$1 + x^3 = 1 + x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow (1+x^3)\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{15}{16}x^3 + o(x^3)$$

$\square$

6) $DL_2(0)$ de $\frac{x}{e^x-1}$

$$e^x-1 = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$, qui est la composée de

$$\frac{1}{1+x} \text{ et } \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)$$

Avec $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+o(x^2)$, on trouve :

$$\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{e^x-1} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)$$

7) $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)$$, composée .....

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = -\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$

8) $DL_3(0)$ de $\sqrt{3+\cosh(x)}$

On a : $ch(x) = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$

$$\Rightarrow \sqrt{3+ch(x)} = \sqrt{4+\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$$; on factorise par 4.

$$= 2\sqrt{1+\frac{x^2}{8}+o(x^3)} = \ldots = 2-\frac{x^2}{8}+o(x^3)$$

9) $DL_3(\frac{\pi}{4})$ de $\sin(x)$

Piste 1 : Via la formule de Taylor-Young.

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sin^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)$$

$$= \dots$$

Piste 2 : Via le changement de variable $t = x - \frac{\pi}{4}$

On a : $x \to \frac{\pi}{4} \iff t \to 0$

Comme ça on se ramène au DL au voisinage de 0.

On a :

$$\sin x = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t + \cos t)$$

$$\sin x \underset{t \to 0}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)$$

Puis on remplace t par $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, et on trouve :

$$\sin x \underset{x \to \frac{\pi}{4}}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)\right]$$

10) $DL_3(0)$ de $\arctan(e^x)$

$$(\arctan(e^x))' = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = e^x \times \frac{1}{1 + e^{2x}} \quad \text{(Produit de deux DL)}$$

Les $DL_2(0)$ de e^x et $\frac{1}{1+e^x}$: $\begin{cases} e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \frac{1}{1+e^{2x}} \underset{0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + o(x^2) \end{cases}$

$$\Rightarrow e^x \times \frac{1}{1+e^{2x}} \underset{0}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) \underset{0}{=} (\arctan(e^x))'$$

Puis par intégration terme à terme entre 0 et x on obtient :

$$\arctan(e^x) \underset{x \to 0}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$$

14) $DL_3(1)$ de $\arctan(x)$

L'idée : D'abord : Le $DL_2(1)$ de $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Puis : On intègre de 1 à x ce dév limité

On a : $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$

Avec le chang de var : $(t = x-1)$, on a $(x \to 1 \Leftrightarrow t \to 0)$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2+2t+t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+t+\frac{t^2}{2}} \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4} + o(t^2)$$

En on remplace t par $(x-1)$, ce qui donne :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + o(x-1)^2 = \arctan' x$$

Et en intégrant terme à terme ce dév limité entre 1 et x on trouve :

$$\arctan x \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o(x-1)^3$$

18) $DL_3(1)$ de $\cos(\ln(x))$

Via chang de var : $(t = x-1)$ pour se ramener au DL au voisinage de 0.

$$\cos(\ln x) \underset{t=x-1}{\overset{x=1+t}{=}} \cos(\ln(1+t)) \underset{t\to 0}{=} \cos\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right)$$

Composée de $\cos t \underset{t\to 0}{=} 1-\frac{t^2}{2}+o(t^3)$ et de $\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+o(t^3)\right)$

Ce qui donne : $1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{2}+o(t^3)$

Enfin, en remplaçant t par $(x-1)$, on trouve :

$$\boxed{\cos(\ln x) \underset{x\to 1}{=} 1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{2}(x-1)^3+o(x-1)^3}$$

15) $DL_3(0)$ de $\frac{x-\sin(x)}{1-\cosh(x)}$

$$\frac{x-\sin x}{1-\cosh(x)} = \frac{\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5!}+o(x^5)}{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4!}+o(x^5)}$$

Car $\begin{cases} \sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5) \\ \cosh(x) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5) \end{cases}$

$$= \frac{\frac{x}{6}-\frac{x^3}{5!}+o(x^3)}{-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+o(x^3)}$$

On simplifie par x^2

$$= \left(\frac{x}{6}-\frac{x^3}{5!}+o(x^3)\right)\times\frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+o(x^3)}$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+o(x^3)} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\times\frac{1}{1+\frac{x^2}{12}+o(x^3)}$$

Et $\frac{1}{1+X} = 1-X+X^2-X^3+o(X^3)$

On remplace X par $\frac{x^2}{12}$, et on tronque à l'ordre 3, on obtient :

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{12}+o(x^3)} = 1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+o(x^3)} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \times \frac{1}{1+\frac{x^2}{12}+o(x^3)}$$

$$= -2\left(1-\frac{x^2}{12}+o(x^3)\right)$$

$$\frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+o(x^3)} = -2+\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$

$$\frac{x-\sin x}{1-\cosh(x)} = \left(\frac{x}{6}-\frac{x^3}{5!}+o(x^3)\right) \times \frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+o(x^3)}$$

$$= \left(\frac{x}{6}-\frac{x^3}{5!}+o(x^3)\right) \times \left(-2+\frac{x^2}{6}+o(x^3)\right)$$

$$= \left(\frac{x}{6}-\frac{x^3}{5!}\right)\left(-2+\frac{x^2}{6}\right)+o(x^3)$$

Enfin

$$\frac{x-\sin x}{1-\cosh(x)} = \ldots\ldots \; +o(x^3)$$

Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ 2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan(x)-x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}$ 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x}-\sqrt[6]{1+4x}}{\sin(x)}$ 6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sinh(x)}{x(\cos(x)-\cosh(x))}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(x)}}{x^2}$ 8) $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\arctan(x)}{x\tan(x)}$ 9) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)^{1+x}$

10) $\lim_{x\to 0}(\sin(x)+\cos(x))^{\frac{1}{x}}$ 11) $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\ln(x)}$ 12) $\lim_{x\to 0}(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$

Solution :

2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}$

car

$\left(\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$

$\left(\ln(1+x) = x+o(x)\right)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x\,(x+o(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}$$

(on simplifie par x^2)

$$= -\frac{1}{2}, \text{ car } o(1)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+3x}-\sqrt[6]{1+4x}}{\sin(x)}$

On a $\begin{cases}\sqrt[5]{1+3x} = (1+3x)^{\frac{1}{5}} \underset{0}{=} 1+\frac{3}{5}x+o(x)\\ \sqrt[6]{1+4x} = (1+4x)^{\frac{1}{6}} \underset{0}{=} 1+\frac{2}{3}x+o(x)\end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{1+3x}-\sqrt[6]{1+4x} \underset{0}{=} \frac{-x}{15}+o(x)$$

et $\sin x \underset{0}{=} x+o(x)$

$$D'où \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x}-\sqrt[6]{1+4x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{15}+o(x)}{x+o(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{15}+o(1)}{1+o(1)} \quad \left(\text{on simplifie par } x\right)$$

$$= -\frac{1}{15} \quad \left(\text{car } o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0\right)$$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sinh(x)}{x(\cos(x)-\cosh(x))}$

On a $\begin{cases} \sin x \underset{0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \\ sh(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \sin x - sh(x) = -\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

et on a $\begin{cases} \cos x \underset{0}{=} x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \\ ch(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \cos x - ch(x) = -x^2+o(x^2)$$

$$D'où \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-sh(x)}{x(\cos x - ch(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x(-x^2+o(x^2))}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{-x^3+o(x^3)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{-1 + o(1)} \quad \left(\text{on simplifie par } x^3\right)$$

$$= \frac{1}{3} \quad \left(\text{car } o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} 0\right)$$

1) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

1) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

$\sin x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$\sin^2 x \underset{0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o(x^3)$

$\sin^2 x \underset{x \to 0}{=} x^2 + o(x^3)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^2 \left(x^2 + o(x^3) \right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^4 + o(x^5)}$$

C'est correct mais on est dans l'impasse.

Alors On pousse l'ordre ici

On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$\Rightarrow \sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2 \left(x^2 + o(x^2) \right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{1 + o(1)}$$ (on simplifie par x^4)

$$= \boxed{1/3}$$

8) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\arctan(x)}{x\tan(x)}$

Il y a des produits et un quotient. Le mieux est de faire avec des équivalents usuels.

On a $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$; $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

et $\cos x \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow 1 - \cos x \underset{0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\Rightarrow (1-\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

D'où $\frac{(1-\cos x)\arctan(x)}{\arctan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2} \times x}{x} \sim \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arctan(x)}{\arctan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0$

10) $\lim_{x\to 0} (\sin(x) + \cos(x))^{\frac{1}{x}}$

$$(\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x + \cos x)}$$

On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$

$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + o(x)$

$$\Rightarrow \ln(\sin x + \cos x) \underset{x\to 0}{=} \ln(1 + x + o(x)) \underset{x \to 0}{=} x + o(x)$$

Car $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$

Ainsi :

$$(\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{=} e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x + \cos x)} \underset{x\to 0}{=} e^{1+o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} e \quad \left(\text{car } o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0\right)$$

Enfin :

$$\lim_{x\to 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}} = e$$

---

4) $\lim_{x\to 0} \frac{x+\tan(x)-x\cos(x)-\sin(x)}{x^3}$

On a :

$$x + \tan x - x\cos x - \sin x \underset{0}{=} x^3 + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x + \tan x - x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} (1 + o(1))$$

$$= 1$$

---

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

$$\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}$$

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{0}{=} 1-\frac{x}{2}+o(x)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e = e^{1-\frac{x}{2}+o(x)}-e = e\left(e^{-\frac{x}{2}+o(x)}-1\right)$$

$$\begin{cases} e^{x} \underset{0}{=} 1+x+o(x) \\ -\frac{x}{2}+o(x) = -\frac{x}{2}+o(x) \end{cases} \Longrightarrow e^{-\frac{x}{2}+o(x)} = 1-\frac{x}{2}+o(x)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e = e\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)$$

D'où $\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = e\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{e}{2}$

Exercice 5 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right)$ 2) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin(\frac{1}{x})\right)^{x^2}$ 3) $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$ 5) $\lim_{x\to e}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}\right)$ 6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$

Solution :

1) $\lim_{x\to+\infty}\left(x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right)$

On a $x \to +\infty \iff \frac{1}{x} \to 0$

Posons $t = \frac{1}{x}$ (càd: $x = \frac{1}{t}$). On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t} - \frac{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} + o(1)\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{2} + o(1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)}$

On a $x \to \frac{\pi}{4} \iff (x - \frac{\pi}{4}) \to 0$

Posons $t = x - \frac{\pi}{4}$. On a : $x \to \frac{\pi}{4} \iff t \to 0$

Ainsi, on a :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos(2x)} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Rappel : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \cdot \tan b}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos(2x)} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1-\dfrac{\tan t+1}{1-\tan t}}{-\sin(2t)} \qquad \left(\tan\frac{\pi}{4}=1\right)$$

$$\left(\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin a\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2\tan t}{(1-\tan t)\sin(2t)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t+o(t)}{2t+o(t)} \times \frac{1}{1-\tan t} \qquad \begin{pmatrix} \tan t = t + o(t) \\ \sin t = t + o(t) \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2+o(1)}{2+o(1)} \times \frac{1}{\underbrace{1-\tan t}_{\to 1}}$$

$$= 2$$

(2) $\lim_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$

Posons $\frac{1}{x} = t$. On a $(x\to+\infty) \Longleftrightarrow (t\to 0)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t}\sin t\right)^{\frac{1}{t^2}}$$

$$= \lim_{t \to 0} e^{\frac{1}{t^2} \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)}$$

On a $\sin t \underset{t \to 0}{=} t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$

$$\Rightarrow \frac{\sin t}{t} \underset{t \to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) \underset{t \to 0}{=} \ln\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right) \underset{t \to 0}{\sim} \left(-\frac{t^2}{6} + o(t^2)\right) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{-t^2}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^2} \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{-1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) = -\frac{1}{6}$$

Enfin :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = \lim_{t \to 0} e^{\frac{1}{t^2} \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)} = e^{-\frac{1}{6}}$$

5) $\lim_{x \to e} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1}\right)$

Je vois que cette limite est traitable avec le bagage du lycée.

$$\lim_{x \to e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} = \lim_{x \to e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - \ln(e)}$$

$$= \lim_{x \to e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\left(\frac{\ln x - \ln e}{x - e}\right) \times (x - e)}$$

$$= \lim_{x \to e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{e})^2} \times \frac{1}{\frac{\ln x - \ln e}{x - e}}$$

$$= \lim_{x \to e} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{e}} \times \frac{1}{\frac{\ln x - \ln e}{x - e}}$$

Or $\lim_{x \to e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e} = \ln'(e) = \frac{1}{e}$

Alors :

$$\lim_{x \to e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} = \lim_{x \to e} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{e}} \times \frac{1}{\frac{\ln x - \ln e}{x - e}}$$

$$= \frac{e}{2\sqrt{e}}$$

$$\lim_{x \to e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

3) $\lim_{x \to +\infty} x \left(\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \right)$

Posons encore $t = \frac{1}{x}$ (c.à.d $x = \frac{1}{t}$).

On a $(x \to +\infty \iff t \to 0)$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{t}-2}{\frac{1}{t}-1}}-\sqrt{\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}-2}}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sqrt{\frac{1-2t}{1-t}}-\sqrt{\frac{1-t}{1-2t}}\right)$$

On a :

$$\begin{cases}\dfrac{1-2t}{1-t}=(1-2t)\cdot\dfrac{1}{1-t}\underset{0}{=}(1-2t)\left(1+t+o(t)\right)\underset{0}{=}1-t+o(t)\\[2ex] \dfrac{1-t}{1-2t}=(1-t)\cdot\dfrac{1}{1-2t}\underset{0}{=}(1-t)\left(1+2t+o(t)\right)\underset{0}{=}1+t+o(t)\end{cases}$$

$\sqrt{\dfrac{1-2t}{1-t}}=\sqrt{1-t+o(t)}$, composée de $\sqrt{1+t}\underset{0}{=}1+\frac{t}{2}+o(t)$

et $(-t+o(t))$.

En remplaçant t dans $\left(1+\frac{t}{2}\right)$ par $(-t)$ on trouve :

$$\sqrt{\frac{1-2t}{1-t}}=\sqrt{1-t+o(t)}\underset{t\to 0}{=}1-\frac{t}{2}+o(t)$$

De même on trouve :

$$\sqrt{\frac{1-t}{1-2t}}\underset{t\to 0}{=}1+\frac{t}{2}+o(t)$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\sqrt{\frac{1-2t}{1-t}}-\sqrt{\frac{1-t}{1-2t}}\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(-t+o(t)\right)$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(-1+o(1)\right)$$

$$=-1 \qquad \left(\text{car } o(1)\xrightarrow[t\to 0]{} 0\right)$$

Enfin :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\right)=-1}$$

(4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)}$$

$$\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)=\ln\left(\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)$$

$$=\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$$

$$\text{Car } \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Ainsi :

$$x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \cancel{x\ln(x)} \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{\ln x}}$$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \quad ; \text{ Car } \begin{cases} \ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t \\ \text{et } \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) = 1$$

Et par suite :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)} = e$$

Exercice 6 :

1) Claculer les limites des suites suivantes :

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin(\frac{1}{n})\right)^{n^2}$ **b)** $\lim_{n\to+\infty} n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n}}-n^{\frac{1}{n}}\right)$ **c)** $\lim_{n\to+\infty}\left(3\sqrt[n]{2}-2\sqrt[n]{3}\right)^n$

2) Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_n$ dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \sqrt[n+1]{n+1}-\sqrt[n]{n}$ **b)** $u_n = 2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$ **c)** $u_n = \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

Solution :

a) $\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin(\frac{1}{n})\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

Considérons la fonction $f(x) = x^2\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

Posons $\frac{1}{x}=t$, on a $(x\to+\infty)\Leftrightarrow(t\to 0)$.

$$f(x) = x^2\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) \quad \left(\text{car } x=\frac{1}{t}\right).$$

$$\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) \underset{0}{=} \frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{1}{t}\left(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)\right)$$

$$\underset{0}{=} \frac{1}{t^2}\ln\left(1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)\right)$$

Or $\ln\left(1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)\right) \underset{t\to 0}{\sim} \left(-\frac{t^2}{6}+o(t^2)\right) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{6}$

Alors : $\frac{1}{t^2}\ln\left(1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)\right) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}$

D'où $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)\right) = -\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{6}$$

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{6}$

Enfin :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{6}}$$

(b) $\lim_{n\to+\infty} n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right) =$$

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)} - e^{\frac{1}{n}\ln n}$$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} - e^{\frac{1}{n}\ln n}$$

$$= e^{\frac{1}{n}\ln n}\cdot e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - e^{\frac{1}{n}\ln n}$$

$$= e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} ?$$

$$\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \text{ (car } \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\text{)}$$

$$\sim \frac{1}{n^2} \quad \left(\text{car } \ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t \text{ et } \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} e^{\frac{\ln n}{n}}$$

$$\Longrightarrow n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{\ln n}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 \quad \left(\text{car } \frac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$$

2) Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_n$ dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

$$U_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$$

$$= e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} - e^{\frac{1}{n}\ln n}$$

$$= e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln n}{n}}$$

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}\left(e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}} - 1\right)$$

$$\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{\ln n}{n}}\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right) \; ; \text{ car } \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right).$$

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \;?$$

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{n\ln(n+1) - (n+1)\ln n}{n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n\ln(n+1) - (n+1)\ln n}{n^2}$$

$$n\ln(n+1) - (n+1)\ln n = \cancel{n\ln(n)} + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - (\cancel{n}+1)\ln n$$

$$= \underbrace{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} - \underbrace{\ln n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty} \underset{n\to+\infty}{\sim} (-\ln n)$$

Đ/sú:

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n\ln(n+1) - (n+1)\ln n}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-\ln n}{n^2}$$

Exercice 10 :

Mêmes questions que dans l'exercice 9, pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \frac{x\cosh(x)-\sinh(x)}{\cosh(x)-1}$.

2) $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

Solution

1) $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, x \longmapsto \frac{x\cosh(x)-\sinh(x)}{\cosh(x)-1}$.

$$f(x) = \frac{x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x - 1} \quad ; \ (\forall x \neq 0)$$

1) i) Prolongement en 0 :

On a $\begin{cases} x\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = \dfrac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \mathrm{ch}\,x - 1 = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\frac{x}{3} + o(x)}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{2} + o(1)}_{\to \frac{1}{2}}} \quad (\text{on simplifie par } x^2)$$

$$= 0$$

f est donc prolongeable par continuité en 0.
Notons encore f son prolongement par continuité en 0 (Ainsi $f(0)=0$).

ii) tangente en 0 et sa position par rapport à la courbe (C_f)

On trouve (faites vos calculs), que :

$$\boxed{f(x) \underset{0}{=} \frac{2}{3}x + \frac{x^3}{90} + o(x^3)}$$

$\Rightarrow$ $(T_0) : y = \frac{2}{3}x$,

$\left(f(x) - \frac{2}{3}x\right) \sim \frac{x^3}{90}$, donc le signe de $\left(f(x) - \frac{2}{3}x\right)$ est positif à droite en 0 et négatif à gauche) au vois de 0 .

$\Rightarrow \begin{cases} \rightarrow \text{À droite en } 0 : (C_f) \text{ est au-dessus de } (T_0) \\ \rightarrow \text{À gauche en } 0 : (C_f) \text{ est au-dessous de } (T_0) \end{cases}$

« et ceci encore une fois au voisinage de 0 »

La suite viendra