Calcul algébrique

Les nombres qu'on étudiera sont des complexes.

I) Le symbole somme $\sum$

Exemples illustratifs

1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \sum_{k=1}^{4} x_k$

2) $a_0 + a_1 + a_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k$

3) $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$

Cas général

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

$$x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n = \sum_{k=p}^{n} x_k$$

Cas particulier

$$\sum_{k=p}^{p} x_k = x_p$$

Question :

$$\sum_{k=2}^{1} x_k = ?$$

Réponse

$$\sum_{k=2}^{1} x_k = 0$$

Convention

Si $p > n$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x_k = 0$

NB :

Supposons que $p \leq n$.

1) La somme $x_p + \cdots + x_n$ se note aussi $\displaystyle\sum_{i=p}^{n} x_i$ ou $\displaystyle\sum_{j=p}^{n} x_j$ ...

2) La variable i (ou j) s'appelle variable muette.

Exemples

Écrivez sous forme de $\sum$ les sommes suivantes :

1) $S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$

2) $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

3) $S_3 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

4) $S_4 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

Solution :

1) $S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{20} k^2$

2) $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

3) $S_3 = 1+2+3+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$

4) $S_4 = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Propriétés immédiates

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) $\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$

c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \ \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + \mu y_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

a) $\sum_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda$

b) $\sum_{k=p}^{n} \lambda = \lambda(n-p+1)$

où $p \leq n$.

Démo

1) a) $\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = (x_1+y_1) + \cdots + (x_n+y_n)$

$= (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_n$

$$= \lambda(x_1 + \cdots + x_n)$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$$

c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \ \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + \mu y_k) \overset{a)}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda y_k$

$$\overset{b)}{=} \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k$$

2) a) $\sum_{k=1}^{n} \overset{x_k}{\lambda} = \underbrace{\overset{x_1}{\lambda} + \overset{x_2}{\lambda} + \cdots + \overset{x_n}{\lambda}}_{n \text{ fois}}$

$$= n\lambda$$

b) Pareil

Décalage d'indices

Exemples

1) $\sum_{k=2}^{13} x_k = \sum_{k=1}^{12} x_{k+1}$

2) $\sum_{k=1}^{26} x_k = \sum_{k=2}^{27} x_{k-1}$

3) $\sum_{k=1}^{33} x_k = \sum_{k=3}^{35} x_{k-2}$

4) $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}$

5) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1} k^2$

6) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k-1}$

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)k}$

Somme téliscopique

Prop (Simplification téliscopique)

Supposons que $1 \leqslant p \leqslant n$.

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$

2) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_p$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0$

4) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_{p-1}$

Démo

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$?

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k)$ c'est la somme des termes suivants:

$$\begin{array}{|l}
\cancel{x_2} - x_1 \\
\cancel{x_3} - \cancel{x_2} \\
\quad \vdots \\
x_{n+1} - \cancel{x_n}
\end{array}$$

Ça reste $u_{n+1} - u_1$

À retenir

1) À l'intérieur d'une somme téléscopique, on a deux termes d'indices consécutifs, séparés par un "$-$".

2) Dans la simplification téléscopique, seuls le terme du plus petit indice et celui du plus grand indice qui restent, affectés des signes qui les précédent.

Exercice d'application 1

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$(\forall n \geq 1, \ U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Simplifier U_n, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice d'application 2

Soit $(C_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$(\forall n \geq 1, \ C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Simplifier C_n, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} C_n$.

Exercice d'application 3

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$(\forall n \geq 1, \ U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k})$$

Étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.

Solution de l'ex d'applic 1

Soit $n \geq 1$. On a :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$$

$$= \ln(n+1) - \ln(1)$$

$\forall n \geq 1,\ U_n = \ln(n+1)$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

Solution de l'ex d'applic 2

Soit $n \geq 1$. On a :

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$\forall n \geq 1,\ C_n = 1 - \frac{1}{n+1}$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 1$

Solution de l'ex d'applic 3

Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right) + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n+1+k} - \frac{1}{n+k} \right) + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{n+n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{2(n+1) - 2(2n+1) + (2n+1)}{2(2n+1)(n+1)}$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} > 0$$

D'où $(U_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite croissante.

II) Le symbole produit $\prod$

Exemples illustratifs

1) $x_1 \times x_2 \times x_3 \times x_4 = \prod_{k=1}^{4} x_k$

2) $a_0 \times a_1 \times a_2 = \prod_{k=0}^{2} a_k$

3) $x_0 \times x_1 \times \dots \times x_n = \prod_{k=0}^{n} x_k$

Cas général

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$.

$$x_p \times x_{p+1} \times \dots \times x_n = \prod_{k=p}^{n} x_k$$

Cas particulier

$$\prod_{k=p}^{p} x_k = x_p$$

Question :

$$\prod_{k=2}^{1} x_k = ?$$

Réponse

$$\prod_{k=2}^{1} x_k = 1$$

Convention

Si $p > n$, $\prod_{k=p}^{n} x_k = 1$

NB :

Supposons que $p \leq n$.

1) Le produit $x_p \times \cdots \times x_n$ se note aussi $\prod_{i=p}^{n} x_i$ ou $\prod_{j=p}^{n} x_j$ ...

2) La variable i (ou j) s'appelle variable muette.

Propriétés immédiates

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) $\prod_{k=1}^{n} (x_k y_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)$

2) $\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{y_k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\prod_{k=1}^{n} y_k}$

où ($y_k \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$).

3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

i) $\prod_{k=1}^{n} \lambda = \lambda^n$

ii) $\prod_{k=p}^{n} \lambda = \lambda^{n-p+1}$ si $p \leq n$.

4) i) $\prod_{k=1}^{n} (\lambda x_k) = \lambda^n \cdot \prod_{k=1}^{n} x_k$

ii) $\prod_{k=p}^{n} (\lambda x_k) = \lambda^{n-p+1} \cdot \prod_{k=p}^{n} x_k$

où $p \leq n$.

5) i) $\prod_{k=1}^{n} x_k = 0 \iff (\exists 1 \leq k \leq n,\ x_k = 0)$

ii) $\prod_{k=1}^{n} x_k \neq 0 \iff (\forall 1 \leq k \leq n,\ x_k \neq 0)$

Démo

1) $\prod_{k=1}^{n} (x_k y_k) = (x_1 y_1) \times \cdots \times (x_n y_n)$

$= (x_1 \times \cdots \times x_n) \cdot (y_1 \times \cdots \times y_n)$

$= \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \times \left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)$

2) $\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{y_k}\right) = \frac{x_1}{y_1} \times \cdots \times \frac{x_n}{y_n}$

$= \frac{x_1 \times \cdots \times x_n}{y_1 \times \cdots \times y_n}$

$= \frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{\prod_{k=1}^{n} y_k}$

3) ii) $\prod_{k=p}^{n} \lambda = \underbrace{\lambda \times \cdots \times \lambda}_{(n-p+1) \text{ fois}}$

$= \lambda^{n-p+1}$

4) ii) $\prod_{k=p}^{n}(\lambda x_k) = \left(\prod_{k=p}^{n}\lambda\right) \times \left(\prod_{k=p}^{n} x_k\right)$

$= \lambda^{n-p+1} \cdot \prod_{k=p}^{n} x_k$

5) i) $\prod_{k=1}^{n} x_k = 0 \iff x_1 \times \cdots \times x_n = 0$

$\iff x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$ ou $\cdots$ $x_n = 0$

$\iff (\exists\, 1 \leq k \leq n,\ x_k = 0)$

ii) $\prod_{k=1}^{n} x_k \neq 0 \iff (\forall\, 1 \leq k \leq n,\ x_k \neq 0)$

par passage à la négation dans 5) i).

Prop

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \,]0, +\infty[$. On a :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$e^{\sum_{k=1}^{n} x_k} = \prod_{k=1}^{n} e^{x_k}$$

Démo

1) $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \ln(x_1 \times \cdots \times x_n)$

$= \ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$$

2) $$e^{\sum_{k=1}^{n} x_k} = e^{x_1 + \cdots + x_n}$$

$$= e^{x_1} \times \cdots \times e^{x_n}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} e^{x_k}$$

Prop

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \prod_{k=1}^{n} k = n!$

2) i) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Démo

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \ \prod_{k=1}^{n} k = n!$?

Cas 1 : si $n \geq 1$

$$\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$$

Cas 2 : si $n = 0$

On a $\begin{cases} 0! = 1 \text{ ; par convention} \\ \prod_{k=1}^{0} k = 1 \text{ ; car } 1 > 0 \end{cases}$

D'où $\prod_{k=1}^{0} k = 0!$

2) i) – ii) – iii)

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. (Voir TD)

NB

Le décalage d'indice se fait comme dans les sommes $\sum$.

Par exemple :

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=2}^{n+1} x_{k-1}$$

Prop (Produit téléscopique)

Supp que $p \leq n$.

1) $\prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_1}$

2) $\prod_{k=p}^{n} \frac{x_{k-1}}{x_k} = \frac{x_{p-1}}{x_n}$

« les x_k étant non nuls »

Démo

1) $\prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_1}$?

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{\cancel{x_2}}{x_1} \times \frac{\cancel{x_3}}{\cancel{x_2}} \times \cdots \times \frac{x_{n+1}}{\cancel{x_n}}$$

$$= \frac{x_{n+1}}{x_1}$$

NB

1) Dans un produit téléscopique, il y a deux termes d'indices consécutifs séparés par une fraction.
2) Dans la simplification téléscopique, seuls le plus petit et le plus grand des indices qui restent.

Exemple rapide

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

Prop

1) Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Si } (\forall 1 \leq i \leq n,\ x_i \leq y_i) \text{ alors } \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$$

2) Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Si } (\forall 1 \leq i \leq n,\ x_i \leq y_i) \text{ alors } \prod_{i=1}^{n} x_i \leq \prod_{i=1}^{n} y_i$$

Démo

1) Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Supp que $\begin{cases} x_1 \leq y_1 \\ \vdots \\ x_n \leq y_n \end{cases}$.

Alors $x_1 + \cdots + x_n \leq y_1 + \cdots + y_n$

Càd $\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sum_{k=1}^{n} y_k$

2) Soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Supp que $\begin{cases} x_1 \leq y_1 \\ \vdots \\ x_n \leq y_n \end{cases}$.

Alors $x_1 \times \cdots \times x_n \leq y_1 \times \cdots \times y_n$

Càd $\prod_{k=1}^{n} x_k \leq \prod_{k=1}^{n} y_k$

III) Coéfficients binomiaux

1) Factorielle

Déf

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

NB

$0! = 1$, car $\prod_{k=1}^{0} k = 1$ puisque $1 > 0$.

Exemples

1) $(n+1)! = (n+1) \times n!$

2) $n! \times (n+1) \times (n+2) = (n+2)!$

3) $\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}$

4) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = (n+2)(n+1)$

2) Coéfficients binomiaux

Ce sont les C_n^k, ou $\binom{n}{k}$; où $k, n \in \mathbb{N}$.

Déf 1

Soient $k, n \in \mathbb{N}$.

1) Si $k \leq n$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

2) Si $k > n$, $C_n^k = 0$

Prop 2

Soient $k, n \in \mathbb{N}$.

1) $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$

2) $C_n^1 = n$

3) $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

4) $C_n^k = C_n^{n-k}$, où $k \leq n$.

Démo

1) $C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$?

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

2) $C_n^1 = n$?

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!}$$

$$= \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!}$$

$$= n$$

3) $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$?

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$$

$$= \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!}$$

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

4) $C_n^k = C_n^{n-k}$?

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,\big(n-(n-k)\big)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

D'où $C_n^{n-k} = C_n^k$

Prop 3 (Formule de Pascal)

Soient $k, n \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$. On a :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Démo

$$C_n^k + C_n^{k+1} \overset{?}{=} C_{n+1}^{k+1}$$

On a :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)\times(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)\times k!\times(n-k-1)!}$$

$$= \frac{(k+1)\times n! + (n-k)\times n!}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\times(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,((n+1)-(k+1))!}$$

$$= C_{n+1}^{k+1}$$

3) Triangle de Pascal

$n=0 \qquad C_0^0$

$n=1 \qquad C_1^0 \quad C_1^1$

$n=2 \qquad C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$

$n=3 \qquad C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$

$n=4 \qquad C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$

$n=5 \qquad C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$

$\vdots$

Avec $C_n^0 = 1$ et C_n^n, ce triangle devient :

$n=0 \qquad 1$

$n=1 \qquad 1 \quad 1$

$n=2 \qquad 1 \quad C_2^1 \quad 1$

$n=3 \qquad 1 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad 1$

$n=4 \qquad 1 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad 1$

$n=5 \qquad 1 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad 1$

$\vdots$

Et avec la formule de Pascal :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

on remplit le reste du triangle :

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1
$\vdots$						

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Par exemple

$C_5^0 = 1$, $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$, $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$, $C_5^5 = 1$

4) Formule du binôme de Newton

Prop 1

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

NB

La somme de la puissance de a et celle de b est constamment égale à n.

Démo

Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$.

On a $(a+b)^0 = 1$

et on a $\sum_{k=0}^{0} C_0^k a^k b^{0-k} = C_0^0 a^0 b^0 = 1$

D'où $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} C_0^k a^k b^{0-k}$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

et Mq que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$

On a :

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n$$

$$= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$= a \times \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} + b \times \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k}}_{\text{décalons l'indice } k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$

Ce qu'on veut

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^{k-1} a^k b^{n+1-k} + C_n^k a^k b^{n+1-k} \right) + C_n^n a^{n+1} + C_n^0 b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(C_n^{k-1} + C_n^k \right)}_{= C_{n+1}^k \text{, d'après la formule de Pascal}} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} \qquad \square$$

Enfin : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}}$

Prop 2

Soient $a, b \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}$. On a aussi :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k$$

Démo

On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k} \quad (\text{prop } 1)$$

Changeons l'indice k par $(n-i)$. On aura :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} \, a^{n-i} \, b^{n-(n-i)}$$

Car $\boxed{0 \leq k \leq n} \iff 0 \leq n-i \leq n \iff \boxed{0 \leq i \leq n}$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^{i} \, a^{n-i} \, b^{i} \quad \left(\text{car } C_n^{n-i} = C_n^{i}\right)$$

Enfin :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} \, b^k}$$

$\square$

Exercice d'application 1

Développer les expressions suivantes :

1) $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$

2) $(a-b)^3$, $(a-b)^4$, $(a-b)^5$

Solution

Via le binôme de Newton et le triangle de Pascal

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

on tire les développement suivants :

1) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

2) Par une alternance de signe, on tire :

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

Exercice d'application 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Développer $(x+1)^n$ et $(x-1)^n$.

2) Simplifier le sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k 4^k$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k}{2^k}$

Solution

1) a) $$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \quad \left(\text{car } 1^{n-k} = 1\right)$$

b) $$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \times (-1)^{n-k}$$

2) a) $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k 4^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 4^k \times 1^{n-k}$$
$$= (4+1)^n$$
$$= 5^n$$

b) $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times 1^k \times 1^{n-k}$$
$$= (1+1)^n$$
$$= 2^n$$

c) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times (-1)^k \times 1^{n-k}$$
$$= (-1+1)^n$$
$$= 0$$

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 1^{n-k} - 1$

$= \left(\frac{1}{2}+1\right)^n - 1$

$= \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1$ $\square$

5) Identité de Bernoulli

Prop 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On a :

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot b^{n-1-k}}$$

NB

On a aussi :

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} \cdot b^k$$

$$a^n - b^n = (a-b) \times \left(a^{n-1} + a^{n-2} b + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{i+j=n-1} a^i b^j$$

Démo

Montrons que : $\boxed{a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot b^{n-1-k}}$

$$(a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot b^{n-1-k} = a \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot b^{n-1-k} - b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \cdot b^{n-1-k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k}} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

On décale l'indice k, etc.

On on procède par téléscopie.

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-(k+1)} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k} \right)$$

$$= a^n \times b^0 - a^0 \times b^n$$

par téléscopie

$$= a^n - b^n \qquad \square$$

Corollaire 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{C}$. On a :

$$x^n - 1 = (x-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Càd

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \dots + x^{n-1})$$

IV) Sommes doubles

Exemple introductif

Développer les sommes suivantes, et Comparer-les :

1) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}} a_{ij}$

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right)$

3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right)$

Solution

1) $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}} a_{ij} = a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}$

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} + \sum_{j=1}^{3} a_{2j}$

$$= (a_{11}+a_{12}+a_{13}) + (a_{21}+a_{22}+a_{23})$$

3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{2} a_{i1} + \sum_{i=1}^{2} a_{i2} + \sum_{i=1}^{2} a_{i3}$

$$= (a_{11}+a_{21}) + (a_{12}+a_{22}) + (a_{13}+a_{23})$$

On remarque que les trois sommes sont égales :

$$\boxed{\sum_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right)}$$

$\square$

D'une manière générale, on a :

Prop 1

$$\boxed{\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)}$$

On peut permuter $\sum_{i}$ et $\sum_{j}$

NB

Cas de $m = n$:

$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} a_{ij}$ s'écrit aussi $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}$

Prop 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. On a :

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j}$$

Attention à cette erreur !

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Erreur

Démo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \overset{?}{=} \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j$$

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_i y_j\right)$$

Constante, ne dépend pas de la variable j

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j\right)$$

Constante, ne dép pas de i

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \quad \square$$

Notation

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

$$\min(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq b \\ b & \text{si } b \leq a \end{cases}$$

Exercices pour vous entraîner

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} ij$ 2) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \prec j \preceq n} ij$

3) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} (i+j)$ 4) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (i+j)$

5) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} (i+j)^2$ 6) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \prec j \preceq n} (i+j)^2$

7) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} min(i,j)$ 8) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i,j \preceq n} max(i,j)$

9) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \preceq j \preceq n} C_n^j C_i^j$ 10) $\displaystyle\sum_{1 \preceq i \preceq j \preceq n} \frac{i}{j}$

Solution détaillée sur : www.iamateacher.org