Exercice 1 (Extrait de : Centrale 2015)

1) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$ converge.

2) i) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que

$$H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$$

ii) En déduire que $H_n \sim \ln n$

3) Soit r un entier naturel.

Pour quelles valeurs de r, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Sol : 1)

Rappel :

Corollaire 2 :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Si f est positive, continue par morceaux et décroissante **alors** la série $\sum_n \left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right)$ converge.

Considérons $f : t \mapsto \frac{1}{t}$;

f est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$

D'où la série $\sum_{n\geq 2} \left(f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)dt \right)$ converge.

CQFD

2) Notons $S_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$.

$\sum a_n$ CV $\Rightarrow (S_n)_n$ converge. Notons $\lim_n S_n = S$

On a $S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt \right)$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt \right)$$

$$= \int_1^2 + \dots + \int_{n-1}^{n} = \int_1^n$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{t}\,dt$$

$$S_n = H_n - 1 - \ln(n)$$

On $(S_n)_n$ cv alors $(H_n - \ln n)_n$ l'est aussi.

D'où l'existence d'un réel A tel que

$$\lim_n (H_n - \ln n) = A$$

Càd $\quad H_n - \ln(n) - A = o(1)$

Enfin $\quad H_n = \ln(n) + A + o(1)$

Exercice 1 (Extrait de : Centrale 2015)

1) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$ converge.

2) i) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que

$$H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$$

ii) En déduire que $H_n \sim \ln n$

3) Soit r un entier naturel.

Pour quelles valeurs de r, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

2) ii) En déd que $H_n \underset{n}{\sim} \ln n$

On a $H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) + A + o(1)$

$$\Rightarrow \frac{H_n}{\ln(n)} = 1 + \underbrace{\frac{A}{\ln(n)} + \frac{o(1)}{\ln(n)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

D'où $\lim\limits_{n} \frac{H_n}{\ln n} = 1$

C-à-d $\left(H_n \underset{n}{\sim} \ln n\right)$

3) Soit $r \in \mathbb{N}$.

On a $H_n \sim \ln n \Rightarrow \frac{H_n}{(n+1)^r} \sim \frac{\ln n}{n^r}$

$\sum \frac{H_n}{(n+1)^r}$ et $\sum \frac{\ln n}{n^r}$ sont de même nature.

Il s'agit alors de déterminer les valeurs de r pour lesquelles la série $\sum \frac{\ln n}{n^r}$ converge.

Cas 1 : Si $r = 0$

$\sum \ln n$ diverge (grossièrement) $(\ln n \not\to 0)$

Cas 2 : Si $r = 1$

Nature de $\sum \frac{\ln n}{n}$?

On a $\lim\limits_{n} \frac{\ln n}{n} = 0$ alors $\sum \frac{\ln n}{n}$ CV

C'est faux

1) $\sum u_n$ CV $\Rightarrow \lim\limits_{n} u_n = 0$

2) La réciproque en général fausse

Nature de $\sum \frac{\ln n}{n}$?

$\forall n \geq 3, \quad \frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge alors $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge

Car les deux séries sont à termes positifs.

Cas 3 : Si $r \geq 2$

Nature de la série $\sum \frac{\ln n}{n^r}$?

On a $1 < r$

$1 < \gamma < r$

Soit $1 < \gamma < r$

$$\lim_n n^\gamma \cdot \left(\frac{\ln n}{n^r}\right) = \lim_n \frac{\ln n}{n^{r-\gamma}} = 0$$

$r > \gamma$

$$\Rightarrow \frac{\ln n}{n^r} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

or $\sum_n \frac{1}{n^\gamma}$ CV alors $\sum \frac{\ln n}{n^r}$ CV

C/c : $\boxed{\sum_n \frac{H_n}{(n+1)^r} \text{ CV} \iff r \geq 2}$

Séries de Bertrand
(Hors programme)
La technique est à savoir

Déf : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$; où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exo (À savoir traiter) (technique à retenir)

1) Supp que $\alpha > 1$.
M.q. $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ CV

2) Supp que $\alpha < 1$.
M.q. $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ Div

Rappels :
Supp $U_n = o(V_n)$ et que U_n et $V_n > 0$.
1) $\sum V_n$ CV $\Rightarrow \sum U_n$ CV
2) $\sum U_n$ Div $\Rightarrow \sum V_n$ Div

Sol :

1) Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

M.q $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ CV.

Clé : 1 γ α

soit $1 < \gamma < \alpha$.

$$\lim_n n^\gamma \cdot \left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right) = \lim_n \frac{1}{n^{\alpha - \gamma} (\ln n)^\beta} = 0$$

$\alpha - \gamma > 0$

$$\Rightarrow \lim_n \frac{\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right)}{\frac{1}{n^\gamma}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\gamma} \right)$$

Or $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ CV car $\gamma > 1$

alors $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ CV $\blacksquare$

2) Soient $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

M.q $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ Div.

Soit $\alpha < \gamma < 1$.

$$\lim_n n^\gamma \cdot \left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right) = +\infty \Rightarrow \frac{1}{n^\gamma} = o\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \right)$$

$(\alpha - \gamma < 0)$

Or $\sum_n \frac{1}{n^\gamma}$ Div (car $\gamma < 1$)

alors $\sum_n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ Div

$\square$

4) Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) et pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \, dt \ et \ I^{\varepsilon}_{p,q} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q \, dt$$

i) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p, q).

4) i) $\left\{ \begin{array}{l} I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \, dt \\ p, q \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$

$I_{p,q}$ existe ; En effet :

$t \mapsto t^p (\ln t)^q$ conti sur $]0, 1]$

Au vois de 0 :

On a $t^p (\ln t)^q \underset{t \to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

(car $\lim\limits_{t \to 0} t^{p+\frac{1}{2}} (\ln t)^q = 0$ $(p + \frac{1}{2} > 0)$

Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$ CV alors $\boxed{\int_0^1 t^p (\ln t)^q \, dt \text{ CV}}$

4) Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \, dt \text{ et } I^\varepsilon_{p,q} = \int_\varepsilon^1 t^p (\ln t)^q \, dt$$

i) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

ii) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon \in]0,1[,\ I^\varepsilon_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I^\varepsilon_{p,q-1} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$$

Rappels.

1) $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ CV $\iff \alpha < 1$

2) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ CV $\iff \alpha > 1$

4) ii) via une IPP

4) iii) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Déduire que : $\boxed{I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}}$ (Ω_1)

On a :

$\left(\forall \varepsilon \in]0,1[,\ I^\varepsilon_{p,q} = \frac{-q}{p+1} I^\varepsilon_{p,q-1} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}\right)$ (Ω_2)

$I^\varepsilon_{p,q} = \int_\varepsilon^1 t^p (\ln t)^q dt \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q dt$

par passage à la limite "$\varepsilon \to 0$" dans (Ω_2) on obtient (Ω_1)

4) Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \, dt \text{ et } I^\varepsilon_{p,q} = \int_\varepsilon^1 t^p (\ln t)^q \, dt$$

i) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

ii) Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon \in]0,1[,\ I^\varepsilon_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I^\varepsilon_{p,q-1} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$$

iii) En déduire que l'on a

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$$

Question :

Soient p et $q \in \mathbb{N}$.

Justifier que $\int_0^1 t^p (\ln t)^q \, dt \neq 0$

Rappel :

Supp : $\begin{cases} f : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \text{ continue sur } I \\ f \text{ garde un signe constant sur } I \end{cases}$

1) $\int_I f = 0 \Rightarrow (f = 0 \text{ sur } I)$

2) $(f \neq 0 \text{ sur } I) \Rightarrow \int_I f \neq 0$

Rép :

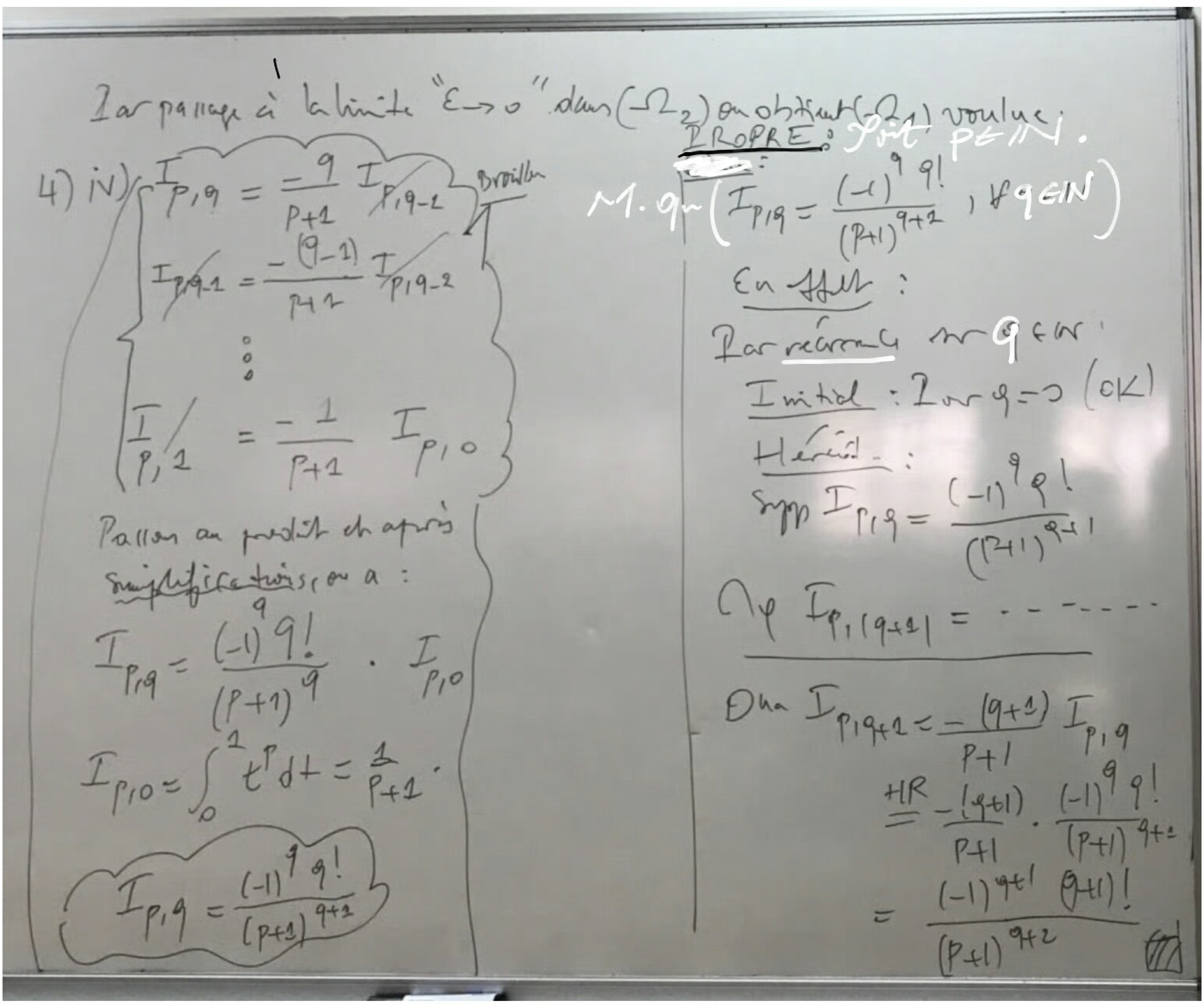
$t \mapsto t^p (\ln t)^q$ continue sur $]0, 1]$, garde un signe constant et elle est non nulle, alors $\int_0^1 \neq 0$

iii) En déduire que l'on a

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$$

iv) En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

4) iv)



5) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$.

f intégrable sur $I \iff \int_I f$ est ACV $\iff \int_I |f|$ CV

5) Soit $x > 0$.
Mq $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

C-à-d que $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ Converge. (ACV car >0)

$t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ Continue sur $]0,+\infty[$

Au voisinage de 0 :

$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ CV ?

On a $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ $\quad$ $\|\ e^{-t} \underset{0}{\sim} 1$ car $\lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$

or $\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ CV car $1-x < 1$

D'où $\boxed{\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \text{ CV}}$ car $t^{x-1} > 0$

Au voisinage de $+\infty$:

$\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$ CV ?

$$t^{x-1} e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \, dt$ CV $(2>1)$

Alors $\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$ CV

C/c : $\boxed{\forall x>0, \ \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt \text{ CV}}$ Très classique

6) Soient $x>0$ et $\alpha>0$.

$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} \, dt$ CV et vaut ??

6) Soit x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-\alpha s} \, ds$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

Chg var

$(t = \alpha s)$

Prenons le Chang de variable :

$$t = \alpha s.$$

Or $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ CV

Alors $\int_0^{+\infty} \alpha^{x-1} \cdot s^{x-1} e^{-\alpha s} \cdot \alpha \, ds,$

qui est $\alpha^x \cdot \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-\alpha s} ds,$

Converge que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \alpha^x \int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-\alpha s} ds$$

D'où $\int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-\alpha s} ds$ Converge et

que : $\boxed{\int_0^{+\infty} s^{x-1} e^{-\alpha s} ds = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}}$

7) Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$.

i) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour tout $x > 0$ et $y > 0$.

7) i) Soient $x > 0$ et $y > 0$.

Posons $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$.

i) L'intégrale $\beta(x,y)$ existe ; en effet :

Càd mq $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ CV

$t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ continue sur $]0,1[$.

Au voisinage de 0

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

or $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}}\,dt$ CV (car $1-x < 1$)

D'où $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ CV

Au voisinage de 1 :

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$$

Or $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{1}{(1-t)^{1-y}}\,dt$ CV (car $1-y<1$)

Alors $\displaystyle\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ CV

C/C : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \text{ CV}}$

Rappels : ⚠ a et $b \in \mathbb{R}$

1) $\displaystyle\int_{\cdot}^{b} \frac{1}{(\underbrace{b-t}_{>0})^{\alpha}}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$

2) $\displaystyle\int_{a}^{\cdot} \frac{1}{(\underbrace{t-a}_{>0})^{\alpha}}\,dt$ CV $\Leftrightarrow \alpha < 1$

Extrait du programme :

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}$ sur $]a, b]$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}$ sur $[a, b[$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

7) Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$.

i) Justifier l'existence de $\beta(x,y)$ pour tout $x > 0$ et $y > 0$.

ii) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

Sol : 7(ii)

$$\begin{cases} \beta(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du \\ \beta(y,x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\, t^{y-1}\, dt \end{cases}$$

via : Chg var. $\boxed{u = 1-t}$

$$\beta(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du$$

$$= -\int_1^0 (1-t)^{x-1}\, t^{y-1}\, dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^{x-1}\, t^{y-1}\, dt$$

$$= \boxed{\beta(y,x)}$$

7) Pour (x,y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$.

i) Justifier l'existence de $\beta(x,y)$ pour tout $x>0$ et $y>0$.

ii) Montrer que pour tous réels $x>0$ et $y>0$, $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

iii) Soient $x>0$ et $y>0$. Etablir que $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

Sol : 7) iii)

Les fonctions $t \longmapsto t^x$ et $t \longmapsto \frac{-(1-t)^y}{y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$. Avec $t^x(1-t)^y \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $t^x(1-t)^y \xrightarrow[t\to 1]{} 0$. Donc, par intégration par parties

$$\begin{aligned}\beta(x+1,y) &= \int_0^1 t^x\left(\frac{(1-t)^y}{-y}\right)'\,\mathrm{d}t\\ &= \underbrace{\left[t^x\left(\frac{(1-t)^y}{-y}\right)\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (t^x)'\,\frac{(1-t)^y}{-y}\,\mathrm{d}t \quad (\mathrm{IPP})\\ &= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \frac{x}{y}\beta(x,y+1)\end{aligned}$$

Soit $\beta(x,y+1) = \frac{y}{x}\beta(x+1,y)$.

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

on a : $\boxed{\beta(x+1,y) = \frac{x}{y}\beta(x,y+1)}$ $(*)$

or on veut montrer $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$ (Ω)

On a :

$$(\Omega) \iff x\,\beta(x+1,y) + \underbrace{y\,\beta(x+1,y)}_{\overset{(*)}{=}\, x\,\beta(x,y+1)} = x\,\beta(x,y)$$

$$\iff x\left(\beta(x+1,y) + \beta(x,y+1)\right) = x\,\beta(x,y)$$

Et on a :

$$x\left(\beta(x+1,y) + \beta(x,y+1)\right) = x\int_0^1 \left(t^x(1-t)^{y-1} + t^{x-1}(1-t)^y\right)dt$$

$$= x\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\underbrace{(t+(1-t))}_{=1}\,dt$$

$$= x\,\beta(x,y)$$

D'où $\beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)$ $\square$

7) Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$.

i) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour tout $x > 0$ et $y > 0$.

ii) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

iii) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Etablir que $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y}\beta(x, y)$.

iv) En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$.

Sol : 7(iv)

$$\beta(x+1, y+1) \overset{iii/}{=} \frac{x}{x+y+1}\beta(x, y+1)$$

$$\overset{ii/}{=} \frac{x}{x+y+1}\beta(y+1, x)$$

$$\overset{iii/}{=} \frac{x}{x+y+1} \cdot \frac{y}{y+x}\beta(y, x)$$

$$\overset{ii/}{=} \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x, y)$$

$\square$

8) Montrer que $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du$.

On pourra utiliser le changement de variable $t = \frac{u}{1+u}$.

Sol : 8°)

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt.$$

$u \mapsto t = \dfrac{u}{1+u}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$. Donc

$$\begin{aligned}
\beta(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{u+1}\right)^{y-1}\frac{1}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$