EXERCICE I (Sol)

1) A possède 3 valeurs propres distincts 2 à 2 et $A \in M_3(\mathbb{R})$, donc A diagonalisable dans $\mathbb{R}$

2) $\lambda_1 = 10$; $\lambda_2 = 4$; $\lambda_3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \lambda_2 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $B_c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

① On a : $u(\varepsilon_1) = \lambda_1 \varepsilon_1$ et $\varepsilon_1 = (1,0,0)$

Alors $\boxed{e_1 = \varepsilon_1 = (1,0,0) \text{ convient}}$

Et on a $u(\varepsilon_2) = \lambda_2 \varepsilon_2$ et $\varepsilon_2 = (0,1,0)$

Alors $\boxed{e_2 = \varepsilon_2 = (0,1,0) \text{ convient}}$

→ Pour e_3 :

$u(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -4y \end{cases}$

$\boxed{e_3 = (0, 1, -4) \text{ convient}}$

3) i) (e_1, e_2, e_3) base de $\mathbb{R}^3$: (OK)

ii) $\text{mat}_S(u) = \Delta = \text{diag}(10, 4, 0)$

où $S = (e_1, e_2, e_3)$

4) $A = P \Delta P^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

On trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}$

5) a) Claire

b) i) $u = v^2 + 3v$ commutte avec v (faites vos calculs)

ii) Soit $k \in \{1,2,3\}$.

On a : $E_{\lambda_k}(u) = \text{Vect}(e_k)$ et il est stable par v car v et u commuttent.

D'où $v(e_k) \in \underbrace{E_{\lambda_k}(u)}_{= \text{Vect}(e_k)}$ (car $e_k \in E_{\lambda_k}(u)$)

$\Rightarrow v(e_k) \in \text{Vect}(e_k)$

Donc $v(e_k)$ colinéaire avec e_k

iii) $\forall 1 \leq k \leq 3$, $v(e_k)$ colinéaire avec e_k

$\Rightarrow \forall 1 \leq k \leq 3$, $\exists \mu_k \in \mathbb{R}$, $v(e_k) = \mu_k e_k$

$\Rightarrow \text{mat}_S(v) = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ CQFD

c) i) On a $A = P \Delta P^{-1}$.

et on a $\begin{cases} B = \text{mat}_{B_c}(v) \\ V = \text{mat}_S(v) \end{cases} \Rightarrow B = P V P^{-1}$

D'autre part, on a :

$A = B^2 + 3B \Leftrightarrow P \Delta P^{-1} = P V^2 P^{-1} + P (3V) P^{-1}$

$\Leftrightarrow \Delta = V^2 + 3V$

ii) $\Delta = \begin{pmatrix} 10 & & 0 \\ 0 & 4 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$; $V = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ 0 & d_2 & \\ & & d_3 \end{pmatrix}$

$\Delta = V^2 + 3V \Leftrightarrow \begin{cases} d_1^2 + 3d_1 = 10 \\ d_2^2 + 3d_2 = 4 \\ d_3^2 + 3d_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = 2 \text{ ou } -5 \\ d_2 = 1 \text{ ou } -4 \\ d_3 = 0 \text{ ou } -3 \end{cases}$

d_1, d_2 et d_3 ont chacune 2 valeurs possibles

alors $V = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ 0 & d_2 & \\ & & d_3 \end{pmatrix}$ aura $2 \times 2 \times 2$ $(= 8)$ valeurs possibles : $V = \text{diag}(2, 1, 0)$ ou $\text{diag}(-2, 1, 0) \cdots$

Ainsi les valeurs possibles de B sont les 8 matrices $P \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ 0 & d_2 & \\ & & d_3 \end{pmatrix} P^{-1}$, où les $\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ 0 & d_2 & \\ & & d_3 \end{pmatrix}$ sont les 8 matrices citées ci-dessus.

d) Notons $(\mathcal{E})$ l'équation : $X^2 + 3X = A$ $(X \in M_3(\mathbb{R}))$

On vient de montrer que :

Si B est solution de $(\mathcal{E})$, alors $B \in \Sigma$;

où $\Sigma = \{ P \,\text{diag}(d_1, d_2, d_3) P^{-1} / (d_1, d_2, d_3) \in \{-5, 2\} \times \{-4, 1\} \times \{0, -3\} \}$

Réciproquement :

Toute matrice de la forme $P \,\text{diag}(d_1, d_2, d_3) P^{-1}$ des éléments de Σ vérifier l'équation $(\mathcal{E})$ car ceci est équivalent à $V^2 + 3V = \Delta$ où $V = \text{diag}(d_1, d_2, d_3)$; ce qui est vrai d'après 5)c).

Enfin, Σ est l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et qui a 8 éléments

Fin Exercice I