INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

I) Passage à la limite sous intégrale

Théorème 1 : (Théorème de la convergence dominée)

Si
1) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ CPM\ sur\ I$
2) $(f_n)\ CS\ vers\ f\ sur\ I,\ et\ f\ CPM\ sur\ I$
3) *Il existe* φ *CPM et intégrable sur I telle que :* $(\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n|\ \preceq \varphi)$ (*hypothèse de domination*)

Alors
1) f *et les* f_n *sont intégrables sur* I
2) $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n\right) = \int_I (lim_{n\to+\infty} f_n)$

Théorème 2 : (Intégration terme à terme d'une série de fonctions)

Si
1) $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ CPM\ et\ intégrable\ sur\ I$
2) $\sum_n f_n\ CS\ vers\ f\ sur\ I,\ et\ que\ f\ est\ CPM\ sur\ I$
3) *La série* $\sum_n \left(\int_I |f_n|\right)$ *converge*

Alors
1) f *est intégrable sur* I
2) $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n\right)$

Remarque pratique :

Dans la pratique, on commence par effectuer un calcul formel où l'on permute les symboles $\sum$et $\int$, que l'on justifie par la suite.

II) Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème : (Continuité)

A une partie d'un *evn* de dimension finie. I intervalle de $\mathbb{R}$.

$f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K};\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$.

Si
1) $\forall t \in\ I,\ x \longmapsto f(x,t)\ est\ continue\ sur\ A$
2) $\forall x \in\ A,\ t \longmapsto f(x,t)\ est\ CPM\ sur\ I$
3) *Il existe* φ *CPM et intégrable sur I telle que :* $(\forall (x,t) \in\ A \times I,\ |f(x,t)|\ \preceq \varphi(t))$ (*hypothèse de domination*)

Alors $\left(g : x \longmapsto \int_I f(x,t)dt\ est\ continue\ sur\ A\right)$

NB : (Un cas fréquent)

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit que l'hypothèse de domination soit vérifiée sur tout segment [a,b] de A.

III) Limites

Théorème (Intervertion limite-intégrale)

Soit $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$; où I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit a une extrémité de J.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall x \in\ J,\ t \longmapsto f(x,t) \text{ est CPM sur } I \\ 2)\ \forall t \in\ I,\ \lim_{x\to a} f(x,t) = l(t) \text{ avec } l \text{ est CPM sur } I \\ 3)\ \text{Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } (\forall (x,t) \in\ J \times I,\ |f(x,t)|\ \preceq \varphi(t)) \\ (\text{hypothèse de domination}) \end{cases}$

Alors $\lim_{x\to a}\left(\int_I f(x,t)dt\right) = \int_I \left(\lim_{x\to a} f(x,t)\right) dt$

IV) Dérivation

Théorème 1 : (Classe $\mathcal{C}^1$)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$; $(x,t) \longmapsto f(x,t)$.

Si $\begin{cases} 1)\ \forall\ t \in\ I,\ x \longmapsto f(x,t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } J \\ 2)\ \forall\ x \in\ J,\ t \longmapsto f(x,t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3)\ \forall\ x \in\ J,\ t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \text{ est CPM sur } I \\ 4)\ \text{Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que : } \left(\forall (x,t) \in\ J \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\ \preceq \varphi(t)\right) \\ (\text{hypothèse de domination}) \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 1)\ g : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } J \\ 2)\ \forall\ x \in\ J,\ g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dt \text{ (dite formule de Leibniz)} \end{cases}$

NB :

Pour l'hypothèse de domination, il suffit de l'avoir sur tout segment inclus dans J. c-à-d :
Pour tout $[a,b] \subset\ J$. Il existe φ CPM et intégrable sur I telle que :

$$\left(\forall (x,t) \in\ [a,b] \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\ \preceq \varphi(t)\right)$$

Théorème 2 : (Classe $\mathcal{C}^n$)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}$; $(x,t) \longmapsto f(x,t)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\begin{cases} 1)\ \forall\ t \in\ I,\ x \longmapsto f(x,t) \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } J \\ 2)\ \forall\ x \in\ J,\ \forall\ 0 \preceq i \preceq n-1,\ t \longmapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t) \text{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3)\ \forall\ x \in\ J,\ t \longmapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \text{ est CPM sur } I \\ 4)\ \forall\ [a,b] \subset\ J. \text{ Il existe } \varphi \text{ CPM et intégrable sur } I \text{ telle que :} \\ \left(\forall (x,t) \in\ [a,b] \times I,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right|\ \preceq \varphi(t)\right) \\ (\text{hypothèse de domination}) \end{cases}$

Alors $\begin{cases} 1)\ g : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } J \\ 2)\ \forall\ 1 \preceq i \preceq n,\ \forall x \in\ J,\ g^{(i)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\ dt \end{cases}$

Théorème 3 : (Classe $\mathcal{C}^\infty$)

I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{K}\,;\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$.

$$\textbf{Si} \begin{cases} 1)\ \forall\, t \in\ I,\ x \longmapsto f(x,t) \textit{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \textit{ sur } J \\ 2)\ \forall\, x \in\ J,\ t \longmapsto f(x,t) \textit{ est CPM et intégrable sur } I \\ 3)\ \forall\, x \in\ J,\ \forall\, n \geq 1,\ t \longmapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) \textit{ est CPM sur } I \\ 4)\ \forall\, [a,b] \subset\ J.\ \forall\, n \geq 1,\ \textit{Il existe } \varphi \textit{ CPM et intégrable sur } I \textit{ telle que :} \\ \left(\forall (x,t) \in\ [a,b] \times I,\ \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \ \preceq \varphi(t)\right) \\ (\textit{hypothèse de domination}) \end{cases}$$

$$\textbf{Alors} \begin{cases} 1)\ g : x \longmapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt \textit{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \textit{ sur } J \\ 2)\ \forall\, n \geq 1,\ \forall x \in\ J,\ g^{(n)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\ dt \end{cases}$$