Correction

Mines de Sup 2000

1. $T:E\to\mathbb{R}$.

Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $A=(a_{i,j}),B=(b_{i,j})$ dans E

$\lambda.A+\mu.B=(\lambda.a_{i,j}+\mu.b_{i,j})_{i,j}$ donc

$$T(\lambda.A+\mu.B)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda.a_{i,i}+\mu.b_{i,i})=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}+\mu.\sum_{i=1}^{n}b_{i,i}=\lambda.T(A)+\mu.T(B)$$

Donc $T\in E^*$.

Soit $U\in E$. $T_U:E\to\mathbb{R}$.

Soit $\lambda,\mu\in\mathrm{R}$ et $A,B\in E$.

$T_U(\lambda.A+\mu.B)=T((\lambda.A+\mu.B)U)=T(\lambda.AU+\mu.BU)=\lambda T(AU)+\mu T(BU)=\lambda.T_U(A)+\mu.T_U(B)$

Donc $T_U\in E^*$.

2.a $AB=(c_{i,j})$ avec $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$ donc $T(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}$.

On conclut en réindexant les sommes.

2.b ${}^tA=(a'_{j,i})$ avec $a'_{j,i}=a_{i,j}$.

$$T({}^tAB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a'_{j,i}b_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}b_{i,j}.$$

$T(AB)=T({}^tAB)=T({}^t({}^tAB))=T({}^tB\,{}^{tt}A)=T({}^tBA)=T(BA)$.

3.a $\ker T_U=E$.

3.b Si $U\neq 0$ elle possède au moins un coefficient non nul. Notons (i,j) son indice et λ sa valeur.

Pour $(i_0,j_0)=(j,i)$: $T_U(E_{i_0,j_0})=T(UE_{i_0,j_0})=\lambda\neq 0$.

$\operatorname{Im}T_U$ est un sous-espace vectoriel de R non réduit à $\{0\}$ c'est donc R.

Par le théorème du rang : $\dim H_U=\dim E-1=n^2-1$.

4.a $T_{i,j}(E_{k,l})=T(E_{j,i}E_{k,l})=T({}^tE_{i,j}E_{k,l})$ se voit égal au coefficient d'indice (i,j) de $E_{k,l}$ c'est à dire $\delta_{i,k}\delta_{j,l}$.

4.b Montrons que la famille est libre.

Si $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}T_{i,j}=0$ alors

$\forall 1\leq k,l\leq n$, on a $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}T_{i,j}(E_{k,l})=0$

d'où $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,l}=0$ puis $\lambda_{k,l}=0$.

La famille des $T_{i,j}$ est libre et formée de $n^2=\dim E$ éléments de E, c'est donc une base de E.

4.c $\varphi:E\to E^*$ est bien définie.

Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $U,V\in E$.

$\forall M\in E,\varphi(\lambda.U+\mu.V)(M)=T((\lambda.U+\mu.V)M)=\lambda.T(UM)+\mu T(VM)=\lambda\varphi(U)(M)+\mu\varphi(V)(M)$.

Donc $\varphi(\lambda.U+\mu.V)=\lambda.\varphi(U)+\mu.\varphi(V)$.

φ est une application linéaire.

De plus φ transforme la base $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de E en $(T_{j,i})_{1\leq i,j\leq n}$ qui est une base $(E,*)$, φ est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5.a Comme $A\notin H$, la matrice A est non nulle et donc $\dim\mathrm{Vect}(A)=1$.

Soit $M\in H\cap\mathrm{Vect}(A)$.

M s'écrit $\lambda.A$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si $\lambda \neq 0$ alors $A = \frac{1}{\lambda}.M \in H$ ce qui est exclu.

Nécessairement $\lambda = 0$ puis $A = 0$.

Ainsi $H \cap \text{Vect}(A) = \{0\}$, de plus $\dim H + \dim \text{Vect}(A) = n^2$, on peut conclure que H et $\text{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans E.

5.b $\forall M \in E, \exists!(X,\alpha) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $M = X + \alpha.A$.

Posons $\ell(M) = \alpha$, on définit ainsi une application $\ell : E \to \mathbb{R}$.

Montrons sa linéarité :

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $M, N \in E$.

$\exists!(X,\alpha) \in H \times \mathbb{R}$ et $\exists!(Y,\beta) \in H \times \mathbb{R}$ tels que :

$M = X + \alpha.A$ et $N = Y + \beta.A$.

On a $\ell(M) = \alpha$ et $\ell(N) = \beta$. Calculons $\ell(\lambda.M + \mu.N)$.

On a $\lambda.M + \mu.N = (\lambda.X + \mu.Y) + (\lambda\alpha + \mu\beta).A$ avec $\lambda.X + \mu.Y \in H$ ceci permet de reconnaître :

$\ell(\lambda.M + \mu.N) = \lambda\alpha + \mu\beta = \lambda\ell(M) + \mu\ell(N)$.

Ainsi ℓ est une forme linéaire sur E.

De plus $\ker \ell = H$ puisque les matrices M qui annulent ℓ sont celles qui s'écrivent : $M = X + 0.A$ avec $X \in H$.

5.c Pour $U = \varphi^{-1}(\ell) \neq 0$, on a $H_U = \ker T_U = \ker \varphi(U) = \ker \ell = H$.

6.a $\text{rg}(A) = n$ donc A est inversible.

6.b $T_{J_r}(A) = T(J_r A) = \sum_{i=1}^{r} T(E_{i,i}A) = 0$.

7. Soit H un hyperplan de E et $U \in E \setminus \{0\}$ telle que $H = H_U$.

Posons $r = \text{rg}(U)$, on sait qu'il existe des matrices inversibles P, Q telles que $PUQ = J_r$.

Pour tout $M \in E$, $T_U(M) = T(UM) = T(P^{-1}J_r Q^{-1}M) = T(J_r Q^{-1}MP^{-1})$.

Pour $M = QAP$, qui est une matrice inversible, on a $T_U(M) = T(J_r A) = 0$ et donc $M \in H_U$.

Ainsi $H = H_U$ possède au moins une matrice inversible, la matrice M.