Séries numériques

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série $\sum_n u_n$ dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = \frac{ch(n)}{ch(2n)}$ 2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 3) $u_n = e - (1+\frac{1}{n})^n$

4) $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 5) $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$ 6) $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

1) $U_n = \frac{ch\, n}{ch\, 2n} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}}$

On a $\begin{cases} e^n + e^{-n} \sim e^n \\ e^{2n} + e^{-2n} \sim e^{2n} \end{cases} \Rightarrow U_n \sim \frac{e^n}{e^{2n}}$

$\Rightarrow U_n \sim \frac{1}{e^n}$

D'où $\sum U_n$ et $\sum \frac{1}{e^n}$ sont de même nature.

Or $\sum \frac{1}{e^n}$, qui est la série géométrique $\sum_n \left(\frac{1}{e}\right)^n$, converge

car $\left|\frac{1}{e}\right| = \frac{1}{e} < 1$

D'où $\sum U_n$ converge.

NB1 : (Piste 2)

$\sum \frac{1}{e^n}$ CV car $\frac{1}{e^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ CV $(\alpha = 2 > 1)$

NB2 : (Error 1)

$\sum \frac{1}{e^n}$ CV car $\lim_n \frac{1}{e^n} = 0$

Faux ! Car $\sum U_n$ CV $\Rightarrow \lim_n U_n = 0$, et non pas l'inverse.

NB3 : (Erreur 2)

On a $\begin{cases} Ch\, n \sim 1 \\ Ch(2n) \sim 1 \end{cases} \Rightarrow U_n = \dfrac{ch\, n}{Ch(2n)} \sim 1$ etc

Faux ! car $Ch(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1$, alors qu'ici $n \to +\infty$.

NB3 : (Erreur)

$\sum \frac{1}{e^n}$ Div car $\frac{1}{e^n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et que $\sum \frac{1}{n}$ Div $(\alpha = 1 \leq 1)$

Faux ! Car avec $\sum \frac{1}{n}$ Div, on ne peut rien conclure.

2) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

NB 1 (Erreur)

On a $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \sim \dfrac{1}{n} \end{cases}$, alors $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right) \sim \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\right)$ etc

C'est Faux ! Pour l'équivalence, on n'a pas le droit de passer à la somme ou à la soustraction.

Solution

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1} \times \sqrt{n^2-1}}$$

On a : $\sqrt{n^2+1} \times \sqrt{n^2-1} \sim (n \times n) \sim n^2$

Passons au numérateur :

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$= \frac{2}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}$$

Et on a $\lim\limits_{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)=2$

Donc $\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 2$

D'où $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} = \dfrac{2}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)} \underset{n}{\sim} \dfrac{1}{n}$

Ainsi : $U_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}\times\sqrt{n^2-1}}$

$\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right) \sim \frac{1}{n}$

$\sqrt{n^2+1}\times\sqrt{n^2-1} \sim n^2$

D'où $U_n \sim \dfrac{\frac{1}{n}}{n^2}$

$\Rightarrow U_n \sim \dfrac{1}{n^3}$

$\Rightarrow \sum U_n$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ de même nature.

Or $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (Riemann : $\alpha = 3 > 1$), alors $\sum U_n$ CV

Méthode 2 (via les développements limités)

$U_n \sim ?$

On a :

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Rappel

$$(1+t)^{\alpha} \underset{t\to 0}{=} 1+\alpha t + o(t)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \left[\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right)$$

$$\Rightarrow \quad U_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Or $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\times\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^3}$

etc

Erreur ⚠

On a $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = (1+n^2)^{-\frac{1}{2}}$, et on utilise le Dév limité $(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1+\ldots\ldots$

C'est faux ! Car $t\to 0$ alors que $n^2 \to +\infty$.

3) $u_n = e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$= e - e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$= e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$U_n = e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right)$$

Rappel:

$$\ln(1+t) \underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

D'autre part : $e^t \underset{t\to 0}{=} 1 + t + o(t)$

$$\Rightarrow e^{-t+o(t)} \underset{t\to 0}{=} 1 - t + o(t)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où $\Rightarrow \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{1}{2n}$

$$\Rightarrow U_n \sim \frac{e}{2n}$$

$\Rightarrow \sum U_n$ et $\sum \frac{e}{2n}$ sont de même nature.

Or $\sum \frac{e}{2n}$ diverge, d'après Riemann ($\alpha = 1 \leq 1$)

Alors $\boxed{\sum U_n \text{ diverge}}$

Exercice 5 :

Justifier l'existence des sommes suivantes et calculer-les :

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ 7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{th\left(\frac{a}{2^n}\right)}{2^n}$

5) $$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{3^{n-1}} \quad \text{(décalage d'indice)}$$

$$= \frac{1}{3^{-1}} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{3^n}$$

$$= 3\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} - \frac{1}{3}\right)$$

$$S = 3\left(S - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3}\right) \qquad S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

$$\Rightarrow 2S = 3\left(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$\sum_{n=N}^{+\infty} q^n = \frac{q^N}{1-q}$$

si $|q|<1$

$$S = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right]$$

$$S = \frac{5}{4}$$

$$3)\quad S=\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(\frac{(n-1)}{n}\frac{(n+1)}{n}\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}\underbrace{\left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)}_{\text{télescopie}}$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\underbrace{\ln\left(\frac{N}{N+1}\right)}_{\to 0}\right)$$

$$\boxed{S=-\ln 2}$$

7) $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{(2n+1)-1}}{(2n+1)^2}$$

$$=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

On a besoin de la somme classique : $\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow \boxed{S=-\frac{\pi^2}{24}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}} \quad ☆$$

Reste à calculer la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

On a :

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{4}\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}_{=\frac{\pi^2}{6}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8} \quad ☆☆$$

De ☆ et ☆☆ on tire que

$$S = \frac{-\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{\pi^2}{12}}$$

Exercice 8 :

Considérons deux suites complexes $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Posons $u_n = \alpha_n v_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1})S_k + \alpha_n S_n$$

2) Supposons maintenant que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle positive décroissante de limite nulle, et qe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que la série $\sum_n (\alpha_n - \alpha_{n+1})S_n$ converge absolument et que la série $\sum_n u_n$ converge.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$u_n = \alpha_n v_n$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

$\forall k \geq 1,\ v_k = S_k - S_{k-1}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k$$

$$= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k$$

$$= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (S_k - S_{k-1})$$

$$= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{k-1}$$

?

$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$

$$= \alpha_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k$$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$

$S_0 = v_0$

$$= \alpha_0 S_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k$$

$$= \alpha_n S_n + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k \right)$$

?

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$$

$$= \alpha_n S_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k$$

---

2) Supposons maintenant que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle positive décroissante de limite nulle, et qe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

i) Montrer que la série $\sum_n (\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n$ converge absolument

Càd on montrera que la série positive $\sum_n |(\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n|$ converge.

$(S_n)_n$ bornée $\Rightarrow (\exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |S_n| \leq M)$

D'où : $\left(\forall n \in \mathbb{N}, |(\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n| = \underbrace{|\alpha_n - \alpha_{n+1}|}_{= \alpha_n - \alpha_{n+1}} \cdot \underbrace{|S_n|}_{\leq M}\right)$

Car (α_n) décroissante

$\Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, |(\alpha_n - \alpha_{n+1}) S_n| \leq M(\alpha_n - \alpha_{n+1})\right)$

Par comparaison des séries positives, il reste à vérifier que la série télescopique $\sum_n (\alpha_n - \alpha_{n+1})$ converge.

Càd que la suite $(\alpha_n)_n$ converge, ce qui est le cas, car $(\alpha_n)_n$ décroissante et minorée par 0 (car positive).

---

ii) Montrons que la série $\sum_n u_n$ converge.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n$ (Ω)

Il s'agit de montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$ converge.

Vu (Ω), il suffit de vérifier que les deux suites

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k-\alpha_{k+1})S_k\right)_n \text{ et } \left(\alpha_n S_n\right)_n \text{ convergent.}$$

Et on a que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k-\alpha_{k+1})S_k\right)_n$ converge car la série

$\sum_n (\alpha_n-\alpha_{n+1})S_n$ est convergente (car ACV).

Et la suite $(\alpha_n S_n)_n$ converge (vers 0) car c'est le produit de la suite $(\alpha_n)_n$ qui tend vers 0 et la suite $(S_n)_n$ qui est bornée.

3) Soient $\beta \succ 0$ et $\theta \in \mathbb{R}|2\pi\mathbb{Z}$.

i) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\ 1+e^{i\theta}+\cdots+e^{in\theta}\ | \preceq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$$1+e^{i\theta}+\cdots+e^{in\theta} = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(e^{i\theta}\right)^k$$

$$= \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}} \quad \left(\text{Car } e^{i\theta}\neq 0 \text{, puisque } \theta\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}\right)$$

$$= \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} \quad \left(\text{Rappel : } e^{ix}-1 = 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}\right)$$

$$1+e^{i\theta}+\cdots+e^{in\theta} = \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\cdot 2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\cdot 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\left|1+e^{i\theta}+\dots+e^{in\theta}\right| = \frac{\left|\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

Rappel : $|e^{ix}| = 1$

ii) En déduire la convergence des séries $\sum_{n\succeq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\beta}$, $\sum_{n\succeq 1} \frac{\cos(n)}{n}$ et $\sum_{n\succeq 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.

D'après 2°), on a :

Si $\begin{cases} (\alpha_n)_n \text{ positive, décroissante de limite nulle} \\ \text{La suite de terme général } S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ bornée} \end{cases}$

Alors la série $\sum_n \alpha_n v_n$ Converge.

A) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\beta}$ Converge, en effet :

Notons $\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{n^\beta} \text{ pour tout } n \geqslant 1 \text{ et } \alpha_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = e^{in\theta}. \end{cases}$

On a $(\alpha_n)_n$ positive, décroissante et $\lim_n \alpha_n = 0$.

En plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|S_n| = \sum_{k=0}^{n} v_k = \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

D'où d'après 2°), la série $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n v_n$, qui est $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\beta}$ Converge.

B) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n}$ Converge ; en effet :

On utilise (A) ; pour $\begin{cases} \theta = 1 \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ \beta = 1 > 0 \end{cases}$, on tire que

la série $\sum_n \frac{e^{in}}{n}$ Converge.

D'où sa série partie réelle, qui est $\sum_n \frac{\cos n}{n}$, Converge.

C) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ Converge ; en effet :

On procède tout comme en B), on prend $\begin{cases} \theta = 1 \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ \beta = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$.

On tire que la série Complexe $\sum_n \frac{e^{in}}{\sqrt{n}}$ Converge.

D'où sa partie imaginaire, la série $\sum_n \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$, converge.

$\boxed{\text{Fin Exercice 8}}$

Exercice 9 :

Notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$

2) Posons $U_n = H_n - \ln(n)$.

   i) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = O(1/n^2)$.

   ii) En déduire que

$$\exists \eta \in \mathbb{R} \ , H_n = \ln(n) + \eta + o(1)$$

3) Posons $V_n = H_n - \ln(n) - \eta$.

   i) Montrer que $(V_{n+1} - V_n) \sim \frac{-1}{2n^2}$

   ii) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

4) i) Montrer via une comparaison série-intégrale que

$$\forall \alpha \succ 1, \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

   ii) En déduire que $H_n = \ln(n) + \eta + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

Solution

Notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$

On a $\frac{1}{k} \underset{k \to +\infty}{\sim} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge

D'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

D'autre part, $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln k\right) = \ln(n+1)$ téléscopie

Et $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$

2) Posons $U_n = H_n - \ln(n)$.

i) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = O(1/n^2)$.

ii) En déduire que

$$\exists \eta \in \mathbb{R}, H_n = \ln(n) + \eta + o(1)$$

$$U_{n+1} - U_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n$$

$$= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] \qquad \left(\text{car } H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \left(\text{car } \frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 + O(x)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \left(\text{car } \ln(1+x) \underset{x \to 0}{=} x + O(x^2)\right)$$

D'où $\displaystyle\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Càd $\boxed{U_{n+1} - U_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

2) Posons $U_n = H_n - \ln(n)$.

i) Montrer que $(U_{n+1} - U_n) = O(1/n^2)$.

ii) En déduire que

$$\exists \eta \in \mathbb{R} \, , H_n = \ln(n) + \eta + o(1)$$

On a $U_{n+1} - U_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge

D'où la série télescopique $\sum (U_{n+1} - U_n)$ converge.

Alors la suite $(U_n)_n$ converge.

$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}, \lim_n U_n = \gamma$

$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}, U_n - \gamma = o(1)$ $\left(\lim (U_n - \gamma) = 0 \Leftrightarrow U_n - \gamma = o(1) \right)$

$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}, H_n - \ln n - \gamma = o(1)$

$\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}, H_n = \ln n + \gamma + o(1)$

---

3) Posons $V_n = H_n - \ln(n) - \eta$.

i) Montrer que $(V_{n+1} - V_n) \sim \frac{-1}{2n^2}$

ii) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

$V_n = H_n - \ln n - \gamma$ et $V_{n+1} = H_{n+1} - \ln(n+1) - \gamma$.

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad \left(\overset{\text{vu}}{\frac{1}{1+x}} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \left(\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \text{ vu}$$

D'où $\dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$

Enfin $\boxed{(V_{n+1} - V_n) \sim -\dfrac{1}{2n^2}}$

3) Posons $V_n = H_n - \ln(n) - \eta$.

i) Montrer que $(V_{n+1} - V_n) \sim \frac{-1}{2n^2}$

ii) En déduire que $V_n \sim \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

On a $(V_n - V_{n+1}) \sim \dfrac{1}{2n^2}$ et $\sum_n \dfrac{1}{2n^2}$ converge

D'où $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} (V_k - V_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$

Or $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(V_k - V_{k+1}) = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=n}^{N}(V_k - V_{k+1})\right)$

$\displaystyle = \lim_{N\to+\infty}(V_n - V_{N+1})$

$\displaystyle = V_n \quad \left(\text{car } 2)\text{ii}) \Rightarrow \lim_{p\to+\infty} V_p = 0\right)$

D'où $\boxed{V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}}$

4) i) Montrer via une comparaison série-intégrale que

$$\forall \alpha \succ 1,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

ii) En déduire que $H_n = \ln(n) + \eta + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha}\,dt\right)$$

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \quad (\Omega)$$

$$\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \int_n^{+\infty} t^{-\alpha}\,dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_n^{+\infty} = \underbrace{\left(\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)\ln t}}{1-\alpha}\right)}_{=0 \text{ car } \alpha>1} + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

$$\Rightarrow \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et $$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

et $(\Omega) \Rightarrow$ $$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$$

4) i) Montrer via une comparaison série-intégrale que

$$\forall \alpha \succ 1, \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

ii) En déduire que $H_n = \ln(n) + \eta + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

On a $V_n \sim \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

et $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ d'après 4) i), pour $\alpha = 2 > 1$.

D'où $V_n \sim \frac{1}{2n}$

Rappel
$U_n \sim \vartheta_n \Leftrightarrow U_n = \vartheta_n + o(\vartheta_n)$

$\Rightarrow V_n = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$V_n = H_n - \ln n - \gamma$

$\Rightarrow H_n - \ln n - \gamma = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

D'où $\boxed{H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$