Hyperplan dans l'espace des matrices carrées

Soit n un entier, $n \geq 2$; on note $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Les éléments de E sont notés $M = (m_{i,j})$, la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i ème ligne et sur la j ème colonne, qui vaut 1.

Lorsque A et B sont des éléments de E, on note $A.B$ leur produit.

Si $M \in E$, on note $\mathrm{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par M.

L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.

Si $M = (m_{i,j}) \in E$, on note $T(M)$ le réel $\sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$.

On définit ainsi une application T de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T(M)$.

A chaque matrice U de E, on associe l'application T_U de E vers $\mathbb{R}$: $M \mapsto T_U(M) = T(U.M)$.

1. Montrer que T est une forme linaire sur E puis qu'il en est de même de T_U pour tout U de E.
   On note H_U le noyau de T_U.

2. Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ des éléments de E.

2.a Montrer que $T(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} b_{i,j}$.

2.b En déduire les identités :

$$T({}^tAB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} \quad \text{et} \quad T(BA) = T(AB).$$

3. Soit U dans E.

3.a Si U est la matrice nulle, déterminer $\ker T_U$.

3.b Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0,j_0}) \neq 0$. Décrire alors $\mathrm{Im}\, T_U$ puis déterminer la dimension de H_U.

4. Pour $(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$, on note $T_{i,j} = T_{E_{j,i}}$.

4.a Les indices k et ℓ étant fixés, calculer $T_{i,j}(E_{k,\ell})$ en utilisant la première relation du 2.b.

4.b En déduire que les n^2 éléments $T_{i,j}$ de E^* permettent de définir une base de E^*.

4.c Montrer que l'application φ de E vers E^* : $U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. On considère un hyperplan vectoriel H de E.

5.a Soit A une matrice de E qui n'appartient pas à H, montrer que les sous-espaces vectoriels H et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans E.

5.b Construire alors un élément ℓ de E tel que $H = \ker \ell$.

5.c Prouver l'existence d'un élément U de E, non nul, tel que $H = H_U$.

6. Pour $1 \leq r \leq n$, on note $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$ et A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.a Prouver que A est inversible.

6.b Prouver que A appartient à l'hyperplan H_{J_r}.

7. Conclure que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.
Indication : lorsque $H = H_U$, avec U de rang r, on rappelle l'existence de matrices P,Q inversibles telles que $PUQ = J_r$.