# Corrigé du concours national commun - Session 2011 - Épreuve de mathématiques II - MP

Par K.Chaira
Lycée Technique C.P.G.E. Mohammedia

**Premier problème**

## $1^{\text{ère}}$ partie : Quelques propriétés de $\Phi_P$

**1.1.**
**1.1.1.** Soit $x=(x_0,\cdots,x_{p-1})\in\mathbb{C}^P$.
$\Phi_P(x)=0$ si, et seulement si, pour tout $k\in\{0,\cdots,p-1\}$, $P_x(\omega_p^k)=0$ si, et seulement si, pour tout $k\in\{0,\cdots,p-1\}$, l'élément $\omega_p^k$ est racine du polynôme $P_x$.
Comme le degré de $P_x$ est inférieur ou égal à $p-1$ et les $p$ éléments $\omega_p^k$, $0\leqslant k\leqslant p-1$, sont distinctes deux à deux, donc $\Phi_P(x)=0$ si, et seulement si, le polynôme $P_x$ est nul.
**1.1.2.** Soient $x=(x_0,\cdots,x_{p-1})$ et $y=(y_0,\cdots,y_{p-1})$ deux éléments de $\mathbb{C}^p$, et $\alpha\in\mathbb{C}$.
$\alpha.x+y=(\alpha\ x_0+y_0,\cdots,\alpha\ x_{p-1}+y_{p-1})$, donc

$$P_{\alpha.x+y}(X)=\sum_{j=0}^{p-1}(\alpha\ x_j+y_j)X^j=\alpha\left(\sum_{j=0}^{p-1}x_jX^j\right)+\sum_{j=0}^{p-1}y_jX^j=\alpha\ P_x(X)+P_y(X).$$

Et, par suite
$\Phi_p(\alpha.x+y)=\left(P_{\alpha.x+y}(\omega_p^0),\cdots,P_{\alpha.x+y}(\omega_p^{p-1}\right)=\left(\alpha\ P_x(\omega_p^0)+P_y(\omega_p^0),\cdots,\alpha\ P_x(\omega_p^{p-1})+P_y(\omega_p^{p-1})\right)$
$\qquad=\alpha.\Phi_p(x)+\Phi_p(y).$
Ainsi, $\Phi_p$ est linéaire ; et, d'après la question précédente, elle est injective. Vu que $\Phi_p$ admet les mêmes espaces de départ et d'arrivé de dimension finie $p$, on en déduit que $\Phi_p$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.

**1.2.**
**1.2.1.** Soit $j\in\{0,\cdots,p-1\}$.
$\Phi_p(e_j)=\left(P_{e_j}(\omega_p^0),\cdots,P_{e_j}(\omega_p^i),\cdots,P_{e_j}(\omega_p^{p-1})\right)=\left(1,\omega_p^j,\cdots,\omega_p^{i\,j},\cdots,\omega_p^{(p-1)j}\right)=\sum_{i=0}^{p-1}\omega_p^{i\,j}.e_i.$
Ainsi, pour tout $(i,j)\in(\{0,\cdots,p-1\})^2$, $m_{i,j}=\omega_p^{i\,j}$.

**1.2.2.** $M=mat(\Phi_p,\beta)=[\omega_p^{i\,j}]_{0\leqslant i,j\leqslant p-1}=\begin{bmatrix}1&1&.&.&.&1\\1&\omega_p&.&.&.&\omega_p^{p-1}\\1&\omega_p^2&.&.&.&\omega_p^{2(p-1)}\\.&.&.&.&.&.\\1&\omega_p^{p-1}&.&.&.&\omega_p^{(p-1)^2}\end{bmatrix}.$

$\det(M)$ est le déterminant de Vandermonde, donc $\det(M)=\prod_{0\leqslant i<j\leqslant p-1}(\omega_p^j-\omega_p^i)$ ; et, comme les $\omega_p^k$, $k\in\{0,\cdots,p-1\}$, sont distinctes deux à deux, donc $\det(M)\neq 0$. Ce qui prouve que l'endomorphisme $\Phi_p$ est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.

**1.3.** Soit $x=(x_0,\cdots,x_{p-1})\in\mathbb{C}^p$ ; on note $\Phi_p(x)=(y_0,\cdots,y_{p-1})$.
**1.3.1.** Soit $(l,j)\in\{0,\cdots,p-1\}^2$, donc $|l-j|\in\{0,\cdots,p-1\}$.
Si $l\neq j$, alors $\omega_p^{(l-j)}\neq 1$ ; et, par suite $\sum_{k=0}^{p-1}\omega_p^{(l-j)k}=\sum_{k=0}^{p-1}\left(\omega_p^{(l-j)}\right)^k=\dfrac{1-\omega_p^{p(l-j)}}{1-\omega_p^{(l-j)}}=\dfrac{1-e^{2i\pi(l-j)}}{1-\omega_p^{(l-j)}}=0.$
Si $l=j$, alors $\omega_p^{(l-j)}=1$ ; et, par suite $\sum_{k=0}^{p-1}\omega_p^{(l-j)k}=p$.

**1.3.2.** Soit $k\in\{0,\cdots,p-1\}$. On a : $y_k=P_x(\omega_p^k)=\sum_{j=0}^{p-1}x_j\ \omega_p^{kj}=\sum_{j=0}^{p-1}x_j\ e^{\frac{2i\pi kj}{p}}$.

$|y_k|^2=\left(\sum_{j=0}^{p-1}x_j\ \omega_p^{kj}\right)\left(\sum_{j=0}^{p-1}\overline{x_j\ \omega_p^{kj}}\right)=\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{l=0}^{p-1}x_j\overline{x_l}\omega_p^{k(j-l)}$. D'après la question 1.3.1),

$$|y_k|^2=\sum_{j=0}^{p-1}x_j\overline{x_j}\omega_p^{k(j-j)}=\sum_{j=0}^{p-1}|x_j|^2.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}|y_k|^2 = \sum_{k=0}^{p-1}\left(\sum_{j=0}^{p-1}|x_j|^2\right) = \sum_{j=0}^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1}|x_j|^2\right) = \sum_{j=0}^{p-1} p\,|x_j|^2 = p\sum_{j=0}^{p-1}|x_j|^2$.

**1.4.**

**1.4.1.** $\overline{M}M = [c_{l,j}]_{0\leqslant l,j\leqslant p-1}$, où $c_{l,j} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}\overline{m_{l,k}}\; m_{k,j} = \sum_{k=0}^{p-1}\overline{\omega_p^{lk}}\;\omega_p^{kj} = \sum_{k=0}^{p-1}\omega_p^{(j-l)k}$.

Si $l=j$, alors $c_{l,l}=p$.
Si $l\neq j$, alors $c_{l,j}=0$.
Ainsi, $\overline{M}M = p.I_p$.

**1.4.2.** L'inverse de la matrice $M$ est $M^{-1} = \frac{1}{p}\overline{M} = \left[\frac{\omega_p^{-lj}}{p}\right]_{0\leqslant l,j\leqslant p-1}$.

$2^{\text{ème}}$ **partie : Un peu d'algorithmique**

**2.1.**

**2.1.1.** Soit $k\in\{0,1,\cdots,\frac{p}{2}-1\}$. On a : $\begin{cases} F_k = \gamma_k\times\omega_p^k, \\ \alpha_k = \beta_k+\gamma_k\times\omega_p^k, \\ \alpha_{k+\frac{p}{2}} = \beta_k-\gamma_k\times\omega_p^k. \end{cases}$

**2.1.2.** $\Phi_p(a) = (\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{p-1})$. Soit $k\in\{0,1,\cdots,\frac{p}{2}-1\}$.

$$\alpha_k = P_a(\omega_p^k) = \sum_{j=0}^{p-1}a_j\;\omega_p^{kj} = \sum_{0\leqslant 2j\leqslant p-2} a_{2j}\;\omega_p^{2kj} + \sum_{0\leqslant 2j+1\leqslant p-1} a_{2j+1}\;\omega_p^{k(2j+1)} = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1}a_{2j}\;\omega_p^{2kj} + \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1}a_{2j+1}\;\omega_p^{k(2j+1)}.$$

Comme $\omega_p^{2jk} = \omega_{\frac{p}{2}}^{kj}$ et $\omega_p^{(2j+1)k} = e^{\frac{2i\pi}{\frac{p}{2}}}\times\omega_p^k = \omega_{\frac{p}{2}}^{kj}\times\omega_p^k$, donc

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1}a_{2j}\;\omega_{\frac{p}{2}}^{kj} + \left(\sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1}a_{2j+1}\;\omega_{\frac{p}{2}}^{kj}\right)\omega_p^k = P_b(\omega_{\frac{p}{2}}^k)+P_c(\omega_{\frac{p}{2}}^k)\times\omega_p^k = \beta_k+\gamma_k\;\omega_p^k.$$

$$\begin{aligned}
\text{On a aussi, } \alpha_{k+\frac{p}{2}} &= P_a\left(\omega_p^{k+\frac{p}{2}}\right) = \sum_{j=0}^{p-1}a_j\;\omega_p^{(k+\frac{p}{2})j} \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1}a_{2j}\;\omega_p^{(2j)(k+\frac{p}{2})} + \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1}a_{2j+1}\;\omega_p^{(k+\frac{p}{2})(2j+1)} \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1}a_{2j}\;\omega_{\frac{p}{2}}^{kj} + \left(\sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1}a_{2j+1}\;\omega_{\frac{p}{2}}^{kj}\right)\omega_p^{k+\frac{p}{2}} = \mathrm{P}_b(\omega_{\frac{p}{2}}^k)+P_c(\omega_{\frac{p}{2}}^k)\times\omega_p^k\times e^{i\pi} = \beta_k-\gamma_k\omega_p^k.
\end{aligned}$$

Ainsi, cet algorithme permet de calculer $\Phi_p(a)$.

**2.2.**

**2.2.1.** Les valeurs initiales de l'algorithme récursif suivant pour le calcul de $\Phi_{2^n}(a)$ sont :

$$s_1 = 2 \text{ et } r_1 = 0.$$

On suppose que $s_{n-1}$ (resp. $r_{n-1}$), $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, est le nombre des additions (resp. de multiplications ) complexes nécessaires au calcul de $\Phi_{2^{n-1}}(b)$ et aussi de $\Phi_{2^{n-1}}(c)$.

Pour tout $k\in\{0,1,\cdots,\frac{p}{2}-1\}$, $\begin{cases} F_k = \gamma_k\times\omega_p^k, \\ \alpha_k = \beta_k+\gamma_k\times\omega_p^k, \\ \alpha_{k+\frac{p}{2}} = \beta_k-\gamma_k\times\omega_p^k. \end{cases}$

On effectue $\frac{p}{2}$ additions pour $\alpha_k$ et $\frac{p}{2}$ additions pour $\alpha_{k+\frac{p}{2}}$, donc en total $p$ additions pour $\alpha_k$ et $\alpha_{k+\frac{p}{2}}$.
On effectue aussi $\frac{p}{2}$ multiplications pour $\alpha_k$ et $\frac{p}{2}$ multiplications pour $\alpha_{k+\frac{p}{2}}$, donc en total $p$ multiplications pour $\alpha_k$ et $\alpha_{k+\frac{p}{2}}$.
Donc,

$$\begin{cases} s_n = p+2s_{n-1} = 2^n+2s_{n-1} \\ \text{et} \\ r_n = p+2r_{n-1} = 2^n+2r_{n-1} \end{cases}.$$

**2.2.2.** $s_n = 2^n+2s_{n-1} = 2^n+2(2^{n-1}+2s_{n-2}) = 2^n+2^n+2^2s_{n-2}$. Par ittération, on obtient

$$s_n = 2^n+2^n+\cdots+2^{n-1}s_1 = n2^n \text{ ( il y'a } n \text{ termes de } 2^n\text{).}$$

$r_n = 2^n + 2r_{n-1} = 2^n + 2(2^{n-1} + 2r_{n-2}) = 2^n + 2^n + 2^2 s_{n-2}$. Par ittération, on obtient

$$s_n = 2^n + 2^n + \cdots + 2^{n-2} r_2 = 2^n + 2^n + \cdots + 2^{n-2}(2^2 + 2r_1) = (n-1)2^n \text{ ( il y'a } n-1 \text{ termes de } 2^n).$$

Comme $p = 2^n$, donc $n = \frac{\ln(p)}{\ln(2)}$. Et, par suite $s_n = \frac{p\ln(p)}{\ln(2)}$ et $r_n = p\left(\frac{p\ln(p)}{\ln(2)} - 1\right)$.

**2.3. Coût du calcul de** $\Phi_p(a)$ par l'algorithme de H$\ddot{o}$ *rner*
**2.3.1.** *Pour* $\mathrm{P}_a(\lambda) = a_o + a_1\lambda$, il y'a une addition et une multiplication nécessaires au calcul de $P_a(\lambda)$.

Pour $P_a(\lambda) = a_o + \lambda\,(a_1 + \lambda(a_2 + \lambda a_3))$, il y'a 3 additions et 3 multiplications nécessaires au calcul de $P_a(\lambda)$.

En général, pour $P_a(\lambda) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k\lambda^k$, $p \in \mathbb{N}^*$, il y'a $p-1$ additions et $p-1$ multiplications nécessaires au calcul de $P_a(\lambda)$.

**2.3.2.** $\Phi_p(a) = \left(P_a(\omega_p^0), \cdots, P_a(\omega_p^{p-1})\right)$.
Il y'a $p$ termes $P_a(\omega_p^0), \cdots, P_a(\omega_p^{p-1})$. Et, pour chaque $P_a(\omega_p^k)$, $0 \leqslant k \leqslant p-1$, on effectue $p-1$ additions et $p-1$ multiplications, donc le nombre total des additions complexes nécessaires au calcul de $\Phi_p(a)$ est $p(p-1)$ ; et, de même, le nombre total des multiplications complexes nécessaires au calcul de $\Phi_p(a)$ est $p(p-1)$.

**2.4.** On a : $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{\frac{p\ln(p)}{\ln(2)}}{p(p-1)} = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{\ln(p)}{(p-1)\ln(2)} = 0$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{p\left(\frac{\ln(p)}{\ln(2)} - 1\right)}{p(p-1)} = \lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{\ln(p)}{\ln(2)} - 1\right)}{p-1} = 0$.
Ce qui justifie que le premier algorithme 2.1) est plus rapide que l'algorithme de H$\ddot{o}$ *rner*.

**Deuxième problème**

1$^{\text{ère}}$ **partie : Théorème de Courant-Fischer**
**1.1.** $f_A$ désigne l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associé à la matrice $A$ relativement à la base canonique de $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), <.,.>)$.
$A$ étant une matrice symétrique réel d'ordre $n$, donc $f_A$ est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ; et, par suite il existe une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), <.,.>)$ formée de vecteurs propres de $f_A$.

1.2. Soit $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

**1.2.1.** $< e_k, e_k >= 1$ et $< f_A(e_k), e_k > = < \lambda_k.e_k, e_k > = \lambda < e_k, e_k > = \lambda_k$, donc $R_A(e_k) = \lambda_k$.
**1.2.2.** Soit $v \in \mathcal{V}_k \setminus \{0\}$.

**.** Il existe $(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ tel que $v = \sum_{i=1}^{k} x_i.e_i$. On a :

$$< v, v > = \left\langle \sum_{i=1}^{k} x_i.e_i, \sum_{j=1}^{k} x_j.e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i^2, \text{ et}$$

$$< f_A(v), v > = \left\langle \sum_{i=1}^{k} x_i.f_A(e_i), \sum_{j=1}^{k} x_j.e_i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{k} (x_i\lambda_i).e_i, \sum_{j=1}^{k} x_j.e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} x_i x_j \lambda_i < e_i, e_j > = \sum_{i=1}^{k} x_i^2\lambda_i.$$

Puisque $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$, donc $< f_A(v), v > \leqslant \lambda_k \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right) = \lambda_k < v, v >$.

Ainsi, $R_A(v) \leqslant \lambda_k$ ; et, ceci est vrai pour tout $v \in \mathcal{V}_k \setminus \{0\}$.
**.** Donc, $\sup\limits_{u\in\mathcal{V}_k\setminus\{0\}} R_A(u) \leqslant \lambda_k$. Comme $R_A(e_k) = \lambda_k$ et $e_k \in \mathcal{V}_k \setminus \{0\}$, donc le $\sup\limits_{u\in\mathcal{V}_k\setminus\{0\}} R_A(u)$ est atteint.
D'où, $\sup\limits_{u\in\mathcal{V}_k\setminus\{0\}} R_A(u) = \max\limits_{u\in\mathcal{V}_k\setminus\{0\}} R_A(u) = \lambda_k$.

**1.3.** Soient $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ et $F \in \mathcal{F}_k$.
**1.3.1.** On a :

$$dim(F) = k,\ dim\,(Vect(e_k, \cdots, e_n)) = n - k + 1 \text{ et } dim\,(F + Vect(e_k, \cdots, e_n)) \leqslant dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n.$$

Comme, $dim\,(F \cap Vect(e_k, \cdots, e_n)) = dim(F) + dim\,(Vect(e_k, \cdots, e_n)) - dim\,(F + Vect(e_k, \cdots, e_n))$, donc

$$dim\,(F \cap Vect(e_k, \cdots, e_n)) \geqslant dim(F) + dim\,(Vect(e_k, \cdots, e_n)) - dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})).$$

Et, par suite, $dim\,(F\cap Vect(e_k,\cdots,e_n))\geqslant 1$.
**1.3.2.** Soit $\omega$ un vecteur non nul de $F\cap Vect(e_k,\cdots,e_n)$, Il existe $(y_k,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^{n-k+1}$ tel que $\omega=\sum_{i=k}^{n} y_i.e_i$. Puisque $\lambda_k\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$, donc $< f_A(\omega),\omega > \geqslant \lambda_k\left(\sum_{i=k}^{n} y_i^2\right) = \lambda_k < \omega,\omega >$. Ainsi, $R_A(\omega)\geqslant\lambda_k$.

**1.4.** Comme $F\cap Vect(e_k,\cdots,e_n)\subset F$, donc $\max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v)\geqslant \max_{\omega\in F\cap Vect(e_k,\cdots,e_n)\setminus\{0\}} R_A(\omega)$. D'après la question 1.3.2), $\max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v)\geqslant\lambda_k$ ; et, ceci est vrai pour tout $F\in\mathcal{F}_k$. Ainsi,

$$\inf_{F\in\mathcal{F}_k}\left(\max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v)\right)\geqslant\lambda_k.$$

En particulier, pour $F=\mathcal{V}_k$, on a $\max_{v\in\mathcal{V}_k} R_A(v)=\lambda_k$, donc $\inf_{F\in\mathcal{F}_k}\left(\max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v)\right)$ est atteint.
D'où,

$$\inf_{F\in\mathcal{F}_k}\left(\max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v)\right)=\min_{F\in\mathcal{F}_k}\left(\max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v)\right)=\lambda_k.$$

**Note :** Si on désigne par $S(0;1)$ la sphère unité de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),< .,. >)$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $F\cap S(0;1)$ est un compact (puisque c'est un fermé et borné dans l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension finie) ; et, comme l'application $x\mapsto< f_A(x),x >$ est continue sur ce compact, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi,

$$\sup_{x\in F\cap S(0;1)\setminus\{0\}} < f_A(x),x > = \max_{x\in F\cap S(0;1)\setminus\{0\}} < f_A(x),x > = \max_{v\in F\setminus\{0\}} < f_A\left(\frac{v}{\|v\|_2}\right),\frac{v}{\|v\|_2} > = \max_{v\in F\setminus\{0\}} R_A(v).$$

## $2^{\text{ème}}$ partie : Continuité et dérivabilité des valeurs propres d'une application matricielle

**2.1.** Soit $v\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En utilisant l'inégalité de Schwarz : $|\ < C.v,v >\ |\leqslant\|Cv\|_2\ \|v\|_2$ et l'inégalité suivante : $\|Cv\|_2\leqslant|||C|||_2\ \|v\|_2$, on obtient $\left|\frac{<Cv,v>}{<v,v>}\right|=\frac{|<Cv,v>|}{\|v\|_2^2}\leqslant|||C|||_2$.

**2.2.**
**2.2.1.** Soient $(t,t_o)\in I^2$, $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ et $v\in\mathcal{V}_k(t_o)\setminus\{0\}$.
D'après la question 1.2.2), $R_{A(t_o)}(v)\leqslant\lambda_k(t_o)$. Donc,

$$R_{(A(t)-A(t_o))}(v)=R_{A(t)}(v)-R_{A(t_o)}(v)\geqslant R_{A(t)}(v)-\lambda_k(t_o).$$

$$\text{et, }\sup_{u\in\mathcal{V}_k(t_o)\setminus\{0\}}\left[R_{(A(t)-A(t_o))}(u)\right]\geqslant R_{(A(t)-A(t_o))}(v)\geqslant R_{A(t)}(v)-\lambda_k(t_o).$$

Et, par suite $\sup_{u\in\mathcal{V}_k(t_o)\setminus\{0\}}\left[R_{(A(t)-A(t_o))}(u)\right]+\lambda_k(t_o)\ \geqslant\ R_{A(t)}(v)$ ; et, ceci est vrai pour tout $v\in\mathcal{V}_k(t_o)\setminus\{0\}$. Donc, $\sup_{u\in\mathcal{V}_k(t_o)\setminus\{0\}}\left[R_{(A(t)-A(t_o))}(u)\right]+\lambda_k(t_o)\ \geqslant\ \max_{v\in\mathcal{V}_k(t_o)\setminus\{0\}} R_{A(t)}(v)$.
D'après la question 1.4) et comme $\mathcal{V}_k(t_o)\in\mathcal{F}_k$, on obtient :

$$\max_{v\in\mathcal{V}_k(t_o)\setminus\{0\}} R_{A(t)}(v)\geqslant\min_{F\in\mathcal{F}_k}\left(\max_{u\in F\setminus\{0\}} R_{A(t)}(u)\right)=\lambda_k(t).$$

Ainsi, $\sup_{u\in\mathcal{V}_k(t_o)\setminus\{0\}}\left[R_{(A(t)-A(t_o))}(u)\right]+\lambda_k(t_o)\ \geqslant\ \lambda_k(t)$.
**1.2.2.** Soit $v\in\mathcal{V}_k(t_o)\setminus\{0\}$. D'après la question 2.1),
$R_{(A(t)-A(t_o))}(v)\leqslant\left|R_{(A(t)-A(t_o))}(v)\right|=\left|\frac{<(A(t)-A(t_o))(v),v>}{<v,v>}\right|\leqslant|||A(t)-A(t_o)|||_2$, donc

$$\lambda_k(t)-\lambda_k(t_o)\leqslant|||A(t)-A(t_o)|||_2.$$

Cette inégalité est vraie pour tout $(t,t_o)\in I^2$, donc $\lambda_k(t_o)-\lambda_k(t)\leqslant|||A(t_o)-A(t)|||_2=|||A(t)-A(t_o)|||_2$.
Ainsi,

$$|\ \lambda_k(t)-\lambda_k(t_o)\ |\leqslant|||A(t)-A(t_o)|||_2.$$

L'application $A$ étant continue sur $I$ par hypothèse, en particulier en un poin $t_o$ de $I$ ; donc $\lim_{t\to t_o}|||A(t)-A(t_o)|||_2=0$ ; et, par suite $\lim_{t\to t_o}\lambda_k(t)=\lambda_k(t_o)$. On conclue ainsi la continuité de $\lambda_k$ en tout point $t_o$ de $I$.

**2.3.**

**2.3.1. .** Les applications $a$ et $b$ sont continues sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} a(t) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} e^{-\frac{1}{t^2}}\cos(\dfrac{1}{t}) = 0 = a(0)$, car

$$\left|e^{-\frac{1}{t^2}}\cos(\frac{1}{t})\right| \leqslant e^{-\frac{1}{t^2}} \text{ et } \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0.$$

Ce qui justifie que $a$ est continue sur $\mathbb{R}$. Presque de la même façon, on montre que $b$ est continue sur $\mathbb{R}$.
**.** les applications $a$ et $b$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$.
**.** Soit $t\in\mathbb{R}^*$. On a : $a^{'}(t) = \frac{1}{t^2}\left[\frac{2}{t}\cos(\frac{1}{t}) + \sin(\frac{1}{t})\right] e^{-\frac{1}{t^2}}$.

Comme, $|a^{'}(t)| \leqslant \frac{1}{t^2}\left(\frac{2}{|t|}+1)\right) e^{-\frac{1}{t^2}}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1)\right) e^{-\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(2x+1)e^{-x^2} = 0 \\ \text{et} \\ \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \dfrac{1}{t^2}\left(-\dfrac{2}{t}+1)\right) e^{-\frac{1}{t^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2(-2x+1)e^{-x^2} = 0 \end{cases}$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} a^{'}(t) = 0$ existe dans $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de $\mathcal{C}^1$ prolongement, l'application $a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Presque de la même façon, on montre que $b$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
**2.3.2.** Soit $t\in\mathbb{R}^*$.
Le polynôme caractéristique de $A(t)$ est :

$$\psi_{A(t)}(X) = det\left(\begin{bmatrix} a(t)-X & b(t) \\ b(t) & -a(t)-X \end{bmatrix}\right) = X^2 - e^{-\frac{2}{t^2}} = (X - e^{-\frac{1}{t^2}})\,(X + e^{-\frac{1}{t^2}}).$$

Donc, les valeurs propres de $A(t)$ sont $e^{-\frac{1}{t^2}}$ et $-e^{-\frac{1}{t^2}}$.

Sous-espaces propres de $A(t)$. On note $\lambda_1(t) =\ e^{-\frac{1}{t^2}}$ et $\lambda_2(t) =\ -e^{-\frac{1}{t^2}}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} \in E_{\lambda_1(t)}(A(t)) &\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos(\frac{1}{t})-1)\ x(t) + \sin(\frac{1}{t})\ y(t) = 0 \\ \sin(\frac{1}{t})\ x(t) - (\cos(\frac{1}{t})+1)\ y(t) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \sin(\tfrac{1}{2t})\ x(t) - \cos(\tfrac{1}{2t})\ y(t) = 0. \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} \in Vect\left(\begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{2t})\\ \sin(\frac{1}{2t})\end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, le sous-espace propre de $A(t)$ associé à $\lambda_1(t)$ est : $E_{\lambda_1(t)}(A(t)) = Vect\left(\begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{2t})\\ \sin(\frac{1}{2t})\end{bmatrix}\right)$.

Pour l'autre sous-espace propre $E_{\lambda_2(t)}(A(t))$ on a :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} \in E_{\lambda_2(t)}(A(t)) &\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos(\frac{1}{t})+1)\ x(t) + \sin(\frac{1}{t})\ y(t) = 0 \\ \sin(\frac{1}{t})\ x(t) - (\cos(\frac{1}{t})-1)\ y(t) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \cos(\tfrac{1}{2t})\ x(t) + \sin(\tfrac{1}{2t})\ y(t) = 0. \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} \in Vect\left(\begin{bmatrix} \sin(\frac{1}{2t})\\ -\cos(\frac{1}{2t})\end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, le sous-espace propre de $A(t)$ associé à $\lambda_2(t)$ est : $E_{\lambda_2(t)}(A(t)) = Vect\left(\begin{bmatrix} \sin(\frac{1}{2t})\\ -\cos(\frac{1}{2t})\end{bmatrix}\right)$.

Pour le cas $t=0$, on a $A(0)$ est la matrice nulle, donc 0 est la seule valeur propre de $A(0)$ et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

On note, pour $t\in\mathbb{R}^*$, $e_1(t) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{1}{2t})\\ \sin(\frac{1}{2t})\end{bmatrix}$ et $e_2(t) = \begin{bmatrix} \sin(\frac{1}{2t})\\ -\cos(\frac{1}{2t})\end{bmatrix}$.

**2.3.3.** Raisonnement par l'absurde, supposons qu'il existe une application continue $e : I \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $e(t)$ soit un vecteur propre de $A(t)$, pour tout $t\in\mathbb{R}$. Donc, $\frac{e(t)}{\|e(t)\|_2} = \begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}$ est aussi un vecteur propre de $A(t)$, pour tout $t\in\mathbb{R}$. Et, par suite il existe une application $\alpha : I\to\mathbb{R}$ non identiquement nulle telle que, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$ , $\frac{e(t)}{\|e(t)\|_2} = \alpha(t).e_1(t)$ ou bien $\frac{e(t)}{\|e(t)\|_2} = \alpha(t).e_2(t)$.
Comme, pour tout $t\in\mathbb{R}^*$, les vecteurs $\frac{e(t)}{\|e(t)\|_2}$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$ étant unitaires, donc $|\alpha(t)| = 1$.
La fonction $\alpha$ est continue sur le connexe par arcs $]0,+\infty[$ ; de plus, pour tout $t\in]0,+\infty[$, $\alpha(t)\in\{-1,1\}$ et $\{-1,1\}$ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, donc $\alpha$ est constante sur $]0,+\infty[$. On suppose par exemple : $\forall t\in]0,+\infty[$, $\alpha(t) = 1$. Donc, pour tout $t\in]0,+\infty[$, $\frac{e(t)}{\|e(t)\|_2} = e_1(t)$ ou bien $\frac{e(t)}{\|e(t)\|_2} = e_2(t)$.

On désigne par $I_1 = \{t \in ]0, +\infty[\ ;\ \frac{e(t)}{\|e(t)\|_2} = e_1(t)\}$ et $I_2 = \{t \in ]0, +\infty[\ ;\ \frac{e(t)}{\|e(t)\|_2} = e_2(t)\}$.
L'élément nul 0 appartient à $\overline{I_1} \cup \overline{I_2}$, car $I_1 \cup I_2 = ]0, +\infty[$.
$1^{\text{ère}}$ **cas :** $0 \notin \overline{I_1}$ ou bien $0 \notin \overline{I_2}$. Par exemple $0 \notin \overline{I_2}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon, \varepsilon[ \cap I_2 = \emptyset$. Et, par suite pour tout $t \in ]0, \varepsilon[$, $\frac{e(t)}{\|e(t)\|_2} = e_1(t)$. On obtient ainsi $x(0) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} x(t) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \cos(\dfrac{1}{2t}) \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde.
De même si $0 \notin \overline{I_1}$, on obtient aussi une contradiction.
$2^{\text{ère}}$ **cas :** $0 \in \overline{I_1} \cap \overline{I_2}$. il existe donc une suite $(t_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $I_1$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = 0$ et une suite $(t_n^{'})_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $I_2$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n^{'} = 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{e(t_n)}{\|e(t_n)\|_2} = e_1(t_n)$ et $\frac{e(t_n^{'})}{\|e(t_n^{'})\|_2} = e_2(t_n^{'})$, donc

$$\begin{cases} x(t_n) = \cos(\frac{1}{2t_n}) \\ y(t_n) = \sin(\frac{1}{2t_n}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t_n^{'}) = \sin(\frac{1}{2t_n^{'}}) \\ y(t_n^{'}) = -\cos(\frac{1}{2t_n^{'}}) \end{cases}.$$

Les fonctions $x$ et $y$ étant continues en 0, donc $x(0) = -y(0)$ et $x(0) = y(0)$ c'est à dire $x(0) = 0 = y(0)$.
On obtient ainsi $e(0) = 0$, ce qui est absurde puisque $e(0)$ est supposé un vecteur propre de $A(0)$.
Ainsi, il n'existe pas d'application continue $e : I \to \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $e(t)$ soit un vecteur propre de $A(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

**2.4.** On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{bmatrix}$, où les applications $a$, $b$ et $c$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Comme $M(t)$ est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
$\psi_{M(t)}(X) = det(M(t) - X.I_2) = det\left(\begin{bmatrix} a(t) - X & b(t) \\ b(t) & c(t) - X \end{bmatrix}\right) = X^2 - ((a(t) + c(t))X + (a(t)c(t) - b(t)^2)$.
Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = ((a(t) + c(t))^2 - 4(a(t)c(t) - b(t)^2) = (a(t) - c(t))^2 + 4b(t)^2$.
Les applications $t \mapsto a(t) - c(t)$ et $t \mapsto 2b(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il existe donc une application $h : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t)^2 = (a(t) - c(t))^2 + 4b(t)^2$. On prend ainsi $\lambda_1(t) = \frac{a(t)+c(t)-h(t)}{2}$ et $\lambda_2(t) = \frac{a(t)+c(t)+h(t)}{2}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Les applications $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ; et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ sont les racines de $\psi_{M(t)}(X)$.

**2.5.**
**2.5.1.** Soit $t \in \mathbb{R}$. On a : $\psi_{B(t)}(X) = det\left(\begin{bmatrix} -X & b(t) \\ t & -X \end{bmatrix}\right) = X^2 - t\, b(t)$.
Cas où $t \in \mathbb{R}^*$.
$\psi_{B(t)}(X) = \left(X - t^2(2 + \sin(\frac{1}{t})\right) \left(X + t^2(2 + \sin(\frac{1}{t})\right)$. La matrice $B(t)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de taille deux, admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1(t) = t^2\left(2 + \sin(\frac{1}{t})\right)$ et $\lambda_2(t) = -t^2\left(2 + \sin(\frac{1}{t})\right)$. Ce qui justifie que $B(t)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Cas où $t = 0$, la matrice $B(0)$ est nulle, donc elle est diagonalisable.
**2.5.2. .** L'application $b$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} b(t) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} t^3 \left(2 + \sin(\dfrac{1}{t})\right)^2 = 0 = b(0)$, car

$$\left| t^3 \left(2 + \sin(\frac{1}{t})\right)^2 \right| \leqslant 9\,|t|^3 \text{ et } \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} 9\,|t|^3 = 0.$$

Ce qui justifie que $b$ est continue sur $\mathbb{R}$.
l'application $b$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a : $b^{'}(t) = t\left(2 + \sin(\frac{1}{t})\right)\left(3t\left(2 + \sin(\frac{1}{t})\right) - 2\cos(\frac{1}{t})\right)$. Comme $|b^{'}(t)| \leqslant 3|t|\ (9|t| + 2)$ et $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} 3|t|\ (9|t| + 2) = 0$, donc $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} b^{'}(t) = 0$ existe dans $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de $\mathcal{C}^1$ prolongement, l'application $b$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En tenant compte que l'application $t \mapsto t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $B$ l'est aussi.

**.** On remarque d'abord que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, la matrice $B(t)$ n'est pas symétrique.
L'application $\lambda_1\ :\ t \mapsto \begin{cases} t^2\left(2 + \sin(\frac{1}{t})\right) & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier en 0.
$\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \dfrac{\lambda_1(t) - \lambda_1(0)}{t - 0} = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} t\left(2 + \sin(\dfrac{1}{t})\right) = 0$, car $\left|t\left(2 + \sin(\frac{1}{t})\right)\right| \leqslant 3|t|$ et $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} 3|t| = 0$. Donc, $\lambda_1$ est dérivable en 0 et $\lambda_1^{'}(0) = 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\lambda_1^{'}(t) = 2t\left(2+\sin(\frac{1}{t})\right) - \cos(\frac{1}{t})$. Comme $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} 2t\left(2+\sin(\dfrac{1}{t})\right) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \cos(\dfrac{1}{t})$ n'existe pas, $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \lambda_1^{'}(t)$ n'existe pas aussi.

En conclusion, $\lambda_1$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Et, de même pour l'application $\lambda_2 :\ t \mapsto \begin{cases} -t^2\left(2+\sin(\frac{1}{t})\right) & \text{si } t \in \mathbb{R}^* \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$.