EXTRAIT DE MINEPONT 2015

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α*-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathsf{E}\big(\exp(tX)\big) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation : $\operatorname{ch}(t) = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

11) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} (\mu_i)^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geqslant k)$ converge et que, dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k) \leqslant \mathsf{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant k).$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $\lfloor X \rfloor$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

14) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pout tout entier $k > 0$:

$$P\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geqslant k\right) \leqslant 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leqslant 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne, on a l'*inégalité d'Orlicz* :

$$\boxed{\mathsf{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leqslant 5}.$$

Fin