

Equations différentielles linéaires scalaires

Résolution d'équation scalaire d'ordre 1

Exercice 1 [00382] [Correction]

Résoudre sur $]1; +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = 2x$$

Exercice 2 [03782] [Correction]

Résoudre sur $]-\pi/2; \pi/2[$

$$y'(x) - \tan(x)y + (\cos x)^2 = 0$$

Exercice 3 [00376] [Correction]

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - y = \sin(2x)e^x$

b) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

c) $y' + y \tan x = \sin 2x$ sur $]-\pi/2; \pi/2[$

Exercice 4 [00377] [Correction]

Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' - (x+1)(y+1) = 0$ et $y(0) = 1$

b) $(1+x^2)y' - (x+1)y = 2$ et $y(0) = -1$.

Exercice 5 [03505] [Correction]

On considère l'équation

$$(E): (1-x)y' - y = g$$

où $g:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est donnée.

a) Résoudre l'équation homogène associée.

b) On suppose que la fonction g est développable en série entière

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

de rayon de convergence $R \geq 1$.

Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière en 0,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R' \geq 1$ et exprimer les a_n en fonction de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etude théorique d'équation d'ordre 1

Exercice 6 [00380] [Correction]

Soit $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable.

Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 7 [00381] [Correction]

a) Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ converge vers 0 en $+\infty$.

b) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $f + f' \xrightarrow{+\infty} \ell$. Montrer que $f \xrightarrow{+\infty} \ell$.

Exercice 8 [03109] [Correction]

Soient α un complexe de partie réelle strictement positive et une application

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f' + \alpha f$ tend vers 0 en $+\infty$.

Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 9 [04100] [Correction]

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.

On étudie l'équation différentielle

$$(E): y' + \alpha y = \varphi(t)$$

- a) Montrer que si y est solution sur \mathbb{R} de l'équation (E) alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ l'est aussi.
- b) En déduire qu'une solution y de (E) est T -périodique si, et seulement si, $y(0) = y(T)$.
- c) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution T -périodique, sauf pour des valeurs exceptionnelles de α que l'on précisera.

Résolution avec raccord d'équation d'ordre 1

Exercice 10 [00419] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(E): x^2 y' - y = 0$$

Exercice 11 [00421] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation suivante

$$(e^x - 1)y' + e^x y = 1$$

Exercice 12 [03468] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation suivante

$$\operatorname{sh}(x)y' - \operatorname{ch}(x)y = 1$$

Exercice 13 [00429] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y' + y = \max(x, 0)$$

Exercice 14 [02889] [Correction]

Résoudre

$$x \ln xy' - (3 \ln x + 1)y = 0$$

Exercice 15 [00420] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $xy' - y = x$

b) $xy' + y - 1 = 0$

c) $xy' - 2y = x^4$

d) $x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$

Exercice 16 [00422] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$

b) $(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$

Exercice 17 [00423] [Correction]

Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :

a) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 0$

b) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 1$.

Exercice 18 [00424] [Correction]

Résoudre sur tout intervalle de \mathbb{R} l'équation différentielle

$$x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2$$

Exercice 19 [00425] [Correction]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0$$

en discutant selon les valeurs de α .

Exercice 20 [00105] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et g une solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$xy' - y = f(x)$$

- a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. Déterminer une condition nécessaire sur $f'(0)$ pour que la fonction ainsi prolongée soit dérivable en 0. Démontrer que cette condition n'est pas suffisante.
- b) f est supposée de classe \mathcal{C}^2 et la condition précédente est vérifiée. Démontrer que g est de classe \mathcal{C}^2 .

Exercice 21 [00506] [Correction]Soit (E) l'équation différentielle

$$(\ln x)y' + \frac{y}{x} = 1$$

- a) Résoudre (E) sur $]0; 1[$ et sur $]1; +\infty[$.
 b) Soit g la fonction définie sur $] -1; +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Montrer que g se prolonge sur $] -1; +\infty[$ en une fonction de classe C^∞ .

- c) Démontrer que (E) admet une solution de classe C^∞ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 22 [01369] [Correction]Soit α un paramètre réel. On désire résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$E: xy' = \alpha y$$

On considère $x \mapsto y(x)$ une solution de E sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

- a) Donner l'expression de $y(x)$ sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* .
 On notera C^+ et C^- les constantes réelles permettant d'exprimer $y(x)$ sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .
 b) À quelles conditions sur les constantes C^+ et C^- , est-il possible de prolonger y par continuité en 0 ?
 On distinguera trois cas, selon que $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ ou $\alpha > 0$.
 c) Pour $\alpha > 0$, à quelles conditions sur les constantes C^+ et C^- la fonction prolongée y est-elle dérivable en 0 ?
 On distinguera trois cas, selon que $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ ou $\alpha > 1$.
 d) Résumer l'étude précédente en donnant la solution générale de E sur \mathbb{R} en fonction de α .

Résolution d'équation scalaire d'ordre 2**Exercice 23** [03240] [Correction]Soit $\alpha > 0$. Résoudre sur $I =]0; +\infty[$ l'équation différentielle

$$E_\alpha: x^2 y''(x) + xy'(x) - \alpha^2 y(x) = 0$$

On pourra étudier les fonctions propres de l'application

$$\varphi: y(x) \mapsto xy'(x)$$

Méthode de variation des constantes**Exercice 24** [00405] [Correction]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

Exercice 25 [00406] [Correction]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan t$$

Exercice 26 [00407] [Correction]

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan^2 t$$

Exercice 27 [02893] [Correction]Résoudre sur $]0; \pi[$

$$y'' + y = \cot x$$

Exercice 28 [00408] [Correction]Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- a) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$y'' + y = f$$

On exprimera la solution à l'aide d'une intégrale.

- b) Déterminer la solution telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 29 [02455] [Correction]

- a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt)$$

- b) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 30 [00409] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que

$$f + f'' \geq 0$$

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

Exercice 31 [02896] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 2π -périodique et solution de

$$y'' + y = f?$$

Exercice 32 [02895] [Correction]

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées.

Exercice 33 [02894] [Correction]

- a) Résoudre sur \mathbb{R}_+^* par variation des constantes l'équation différentielle

$$y'' + y = 1/x$$

- b) En déduire une expression de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{dt}{1+t^2}$$

valable pour $x > 0$.

- c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Recherche de solution développable en série entières

Exercice 34 [01016] [Correction]

- a) Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

- b) Exprimer parmi celles-ci, celles dont la somme est une fonction paire.

Exercice 35 [00401] [Correction]

Résoudre sur $] -1; 1[$ l'équation

$$4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = 0$$

en recherchant les fonctions développables en série entière.

Exercice 36 [00404] [Correction]

- a) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = 0$$

en recherchant les séries entières solutions.

- b) Résoudre ensuite

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Exercice 37 [02528] [Correction]

- a) Montrer qu'il existe une solution h de l'équation

$$xy'' + y' + y = 0$$

développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.

- b) Montrer que h ne s'annule qu'une fois sur $]0; 2[$.

Wronskien

Exercice 38 [00394] [Correction]

Soient $a, b: I \rightarrow \mathbb{C}$ continues et (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de l'équation

$$E: y'' + a(t)y'(t) + b(t)y = 0$$

Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par le wronskien

$$w: t \mapsto \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$$

Exercice 39 [04001] [Correction]

On étudie sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E): ty'' + (1 - 2t)y' + (t - 1)y = 0$$

- Vérifier que $\varphi(t) = e^t$ détermine une solution de (E) .
- Déterminer une expression du wronskien $w(t)$ de deux solutions de l'équation (E) .
- En déduire une solution de (E) indépendante de φ et exprimer la solution générale de (E) .

Etude théorique d'équation d'ordre 2

Exercice 40 [01555] [Correction]

Soit $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue non nulle.

On se propose de montrer que les solutions sur \mathbb{R} de l'équation $y'' + q(x)y = 0$ s'annulent.

Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est une solution ne s'annulant pas.

- Justifier que f est de signe constant.

Quitte à considérer $-f$ au lieu de f , on peut supposer

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$$

- Étudier le signe de f'' .
- Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Quelle est l'équation de la tangente à f en a ?
- Montrer que le graphe de f est en dessous de sa tangente en a .

- En déduire que $f'(a) = 0$ et conclure.

Exercice 41 [00402] [Correction]

Soit $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue non nulle.

Montrer que toute solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$ s'annule.

Exercice 42 [03779] [Correction]

Soient q une fonction continue sur $[a; b]$ à valeurs réelles et f une solution non nulle sur $[a; b]$ de l'équation différentielle

$$(E): y''(x) + q(x)y(x) = 0$$

Montrer que f admet un nombre fini de zéros.

Exercice 43 [03499] [Correction]

Soient $p, q: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et l'équation différentielle définie sur $[0; 1]$ suivante

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Montrer que si une solution possède une infinité de racines alors celle-ci est la fonction nulle.

Exercice 44 [03110] [Correction]

Soient $f \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ et g une solution non identiquement nulle de

$$E: y'' + fy = 0$$

- Montrer que les zéros de g sont isolés.
Dans la suite, x_1 et x_2 sont deux zéros consécutifs de g vérifiant $x_1 < x_2$.
- Montrer, si $x \in [x_1; x_2]$

$$(x_2 - x) \int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t) dt + (x - x_1) \int_x^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t) dt = (x_2 - x_1)g(x)$$

- En déduire une minoration de

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt$$

Exercice 45 [00436] [Correction]

Soient q une fonction continue, intégrable sur $[0; +\infty[$ et (E) l'équation différentielle

$$y'' + q(x)y = 0$$

- a) Si f est une solution bornée de (E) sur $[0; +\infty[$, montrer que sa dérivée f' converge en $+\infty$.
Quelle est la valeur de sa limite ?
- b) Soient f et g deux solutions bornées. Étudier le wronskien de f et de g

$$w = f'g - fg'$$

En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

Exercice 46 [03671] [Correction]

Soient $q_1, q_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant $q_1 \leq q_2$.

On note φ_1 et φ_2 deux solutions sur I respectivement des équations

$$y'' + q_1(x)y = 0 \text{ et } y'' + q_2(x)y = 0$$

On suppose la solution φ_1 non identiquement nulle.

- a) Montrer que les zéros de φ_1 sont isolés i.e. que si $x_0 \in I$ annule φ_1 alors

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha], \varphi_1(x) = 0 \implies x = x_0$$

- b) Soient $a < b$ deux zéros consécutifs de φ_1 . Montrer que φ_2 s'annule sur $[a; b]$.
(indice : étudier $\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1'$)
- c) Application : montrer que si φ est une solution non nulle de l'équation $y'' + e^x y = 0$ alors

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \exists x \in [a; a + \pi], \varphi(x) = 0$$

Exercice 47 [03100] [Correction]

On considère l'équation différentielle

$$E_0: y'' - e^x y = 0$$

- a) Soit y une solution de E_0 sur \mathbb{R} . Étudier la convexité de y^2 .
En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$ alors y est nulle sur \mathbb{R} .

- b) Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 telles que

$$(y_1(0), y_1'(0)) = (0, 1) \text{ et } (y_2(1), y_2'(1)) = (0, 1)$$

Démontrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0 .

- c) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Démontrer que l'équation différentielle

$$E: y'' - e^x y = f(x)$$

admet une unique solution y telle que

$$y(0) = y(1) = 0$$

Exercice 48 [03387] [Correction]

On considère l'équation différentielle

$$(E): y'' + \cos^2(t)y = 0$$

- a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.
- b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* .

- c) Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max \{t < 0 \mid u(t) = 0\} \text{ et } \delta = \min \{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$

- d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u .
En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans $]\gamma; \delta[$.

- e) Soit w une solution non nulle de (E) . Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$

[Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 49 [03920] [Correction]

Soient $q \in \mathcal{C}^0([a; +\infty[, \mathbb{R}_+)$ et (E) l'équation différentielle $y'' = q(x)y$.

- a) Soit f une solution de (E) telle que $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$.
Montrer que f et f' sont strictement positives et que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- b) Soient u et v les solutions de (E) telles que

$$\begin{cases} u(a) = 1 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(a) = 1 \end{cases}$$

Calculer $u'v - uv'$. Montrer que, sur $]a; +\infty[$, u/v et u'/v' sont monotones de monotonies contraires. Montrer que u/v et u'/v' tendent en $+\infty$ vers la même limite réelle.

- c) Montrer qu'il existe une unique solution g de (E) , strictement positive, telle que $g(a) = 1$ et telle que g décroisse sur $]a; +\infty[$.
- d) Déterminer g lorsque $q(x) = 1/x^4$ sur $[1; +\infty[$.
On pourra poser $y(x) = xz(1/x)$.

Problèmes se ramenant à la résolution d'équations différentielles

Exercice 50 [02535] [Correction]

Quelles sont les fonctions continues f telles que

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t) dt?$$

Exercice 51 [02419] [Correction]

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1 - x$$

- a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .
- b) Trouver toutes les fonctions f solution de l'équation étudiée.

Exercice 52 [00378] [Correction]

Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x tf(t) dt + 1$$

Exercice 53 [02890] [Correction]

Trouver les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que pour tout x réel

$$f(x) - 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = 1$$

Exercice 54 [01554] [Correction]

Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x$$

Exercice 55 [02892] [Correction]

Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x > 0, f'(x) = f(1/x)$$

Exercice 56 [03506] [Correction]

Déterminer la dimension de l'espace

$$E = \{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + y(x) = y(0) \cos(x)\}$$

Exercice 57 [03108] [Correction]

Soient f une fonction réelle continue sur $[0; 1]$ et λ un réel.

Trouver u fonction réelle continue sur $[0; 1]$ telle que

$$u(x) = \lambda \int_0^x u(t) dt + f(x)$$

Exercice 58 [01553] [Correction]

Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \text{ et } f(0) = 1$$

Résolution avec raccord d'équation d'ordre 2

Exercice 59 [00427] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$$

en commençant par rechercher les solutions polynomiales.

Exercice 60 [00428] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0$$

Exercice 61 [00426] [Correction]

On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' - x^3 y = 0$$

- Montrer que si y est solution sur I alors $x \mapsto y(-x)$ est solution sur I' symétrique de I par rapport à 0.
- Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation via le changement de variable $t = x^2$.
- Déterminer les solutions sur \mathbb{R} .

Exercice 62 [03501] [Correction]

On étudie l'équation différentielle

$$(E): 4xy'' + 2y' - y = 0$$

- Déterminer les fonctions développables en série entière solutions
- Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* et sur \mathbb{R}_-^* en posant respectivement $x = t^2$ et $x = -t^2$.
- Déterminer les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 63 [01560] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$E: xy'' - (1+x)y' + y = 1$$

en posant $z = y' - y$.

Résolution par changement de fonction inconnue

Exercice 64 [01556] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$$

Exercice 65 [01561] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$E: (1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = x e^x$$

en posant $z(x) = (1+e^x)y(x)$.

Exercice 66 [01559] [Correction]

Résoudre l'équation différentielle

$$(1+e^x)^2 y'' - 2e^x(1+e^x)y' - (3e^x + 1)y = 0$$

en introduisant

$$z(x) = \frac{y(x)}{1+e^x}$$

Exercice 67 [01558] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y'' + 4xy' + (3+4x^2)y = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = e^{x^2}y(x)$.

Exercice 68 [00413] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation

$$x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$$

en posant $z = x^2 y$.

Exercice 69 [03508] [Correction]Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = 0$$

en posant $y(x) = x^\alpha z(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi.**Exercice 70** [00411] [Correction]Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(1 + e^x)y'' + y' - e^x y = 0$$

en introduisant la fonction $z = y' + y$.**Exercice 71** [00412] [Correction]Résoudre sur $]0; +\infty[$ l'équation

$$x^2 y'' - 2y + \frac{3}{x} = 0$$

en introduisant la fonction $z(x) = xy'(x) + y(x)$.

Méthode de Lagrange

Exercice 72 [00395] [Correction]

On étudie l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' - 2y = t$$

- Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de l'équation homogène associée.
- Résoudre l'équation homogène en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.
- Exprimer la solution générale de l'équation étudiée.

Exercice 73 [00396] [Correction]

On étudie l'équation

$$(1 + t^2)^2 y''(t) - 2t(1 + t^2)y'(t) + 2(t^2 - 1)y(t) = (1 + t^2)$$

a) Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de l'équation homogène.b) Résoudre l'équation en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.**Exercice 74** [00397] [Correction]On étudie sur \mathbb{R}_+^* l'équation

$$t^3 y'' + ty' - y = 0$$

a) Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de cette équation.b) Résoudre l'équation en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.**Exercice 75** [00398] [Correction]On étudie sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle

$$t^2 y'' + ty' - y = 1$$

a) Déterminer une solution polynomiale non nulle $\varphi(t)$ de l'équation homogène.b) Résoudre l'équation en procédant au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.**Exercice 76** [00400] [Correction]On étudie sur $]0; 1[$ l'équation

$$x(1 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0$$

a) Rechercher une solution non nulle φ développable en série entière.b) Terminer de résoudre l'équation par le changement de fonction inconnue $y(x) = \varphi(x)z(x)$ **Exercice 77** [01319] [Correction]On étudie l'équation différentielle suivante sur $]0; +\infty[$

$$(E): xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0$$

a) Chercher une solution $\varphi(x)$ développable en série entière au voisinage de 0 et non nulle.

- b) Terminer de résoudre l'équation par le changement de fonction inconnue
 $y(x) = \varphi(x)z(x)$

Exercice 78 [03504] [Correction]

On étudie sur $]0; 1[$ l'équation différentielle suivante

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$$

- a) Rechercher une solution développable en série entière non nulle $\varphi(x)$.
 b) Achever de résoudre cette équation par le changement de fonction
 $y(x) = \varphi(x)z(x)$.

Résolution par changement de variable**Exercice 79** [00414] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

en posant $x = e^t$.

Exercice 80 [01566] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R}_+^* les équations suivantes via le changement de variable $t = \ln x$.

- a) $x^2y'' + xy' - y = x^2$ b) $x^2y'' - 2y = x$

Exercice 81 [00416] [Correction]

Résoudre sur $] -1; 1[$ l'équation

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = \arccos x$$

en procédant au changement de variable $x = \cos(t)$.

Exercice 82 [00415] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$(1+x^2)^2y'' + 2(x-1)(1+x^2)y' + y = 0$$

en procédant au changement de variable $t = \arctan x$.

Exercice 83 [01564] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R}

$$(x^2 + 1)^2y'' + 2x(x^2 + 1)y' + y = 0$$

via $t = \arctan x$.

Exercice 84 [00417] [Correction]

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation

$$y'' + \frac{2t}{t^2 + 1}y' + \frac{1}{(t^2 + 1)^2}y = \frac{t}{(t^2 + 1)^2}$$

en posant $x = \arctan t$.

Exercice 85 [02573] [Correction]

En indiquant les hypothèses nécessaires, effectuer le changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'équation différentielle

$$(1+t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$$

tel qu'elle devienne une équation à coefficients constants et la résoudre.

Exercice 86 [02540] [Correction]

On veut résoudre

$$(E): (x+1)y'' - (3x+4)y' + 3y = (3x+2)e^{3x}$$

Si Δ est l'opérateur de dérivation et $Q(X) = X - 3$, on a $Q(\Delta)(y) = y' - 3y$.
 Montrer l'existence d'un polynôme P de la forme $a(x)X + b(x)$ tel que (E) devienne

$$(P(\Delta) \circ Q(\Delta))(y) = (3x+2)e^{3x}$$

Résoudre l'équation à l'aide du changement de variable $z = Q(\Delta)(y)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Solution homogène : $y_0(x) = C\sqrt{x^2 - 1}$.

Par variation de la constante, solution particulière $y_1(x) = 2(x^2 - 1)$.

Solution générale : $y(x) = C\sqrt{x^2 - 1} + 2(x^2 - 1)$.

Exercice 2 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire de solution générale homogène

$$y(x) = \frac{\lambda}{\cos x}$$

L'application de la méthode de la variation de la constante amène à déterminer

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \, dx - \int \cos x \sin^2 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

Au final, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{\frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x + \lambda}{\cos x}$$

Exercice 3 : [énoncé]

a) $y(x) = (C + \sin^2 x) e^x$

b) $y(x) = (x^2 + C) e^{-x^2}$

c) $y(x) = C \cos x - 2 \cos^2 x$

Exercice 4 : [énoncé]

a) Solution de l'équation homogène sur \mathbb{R} : $y(x) = C e^{\frac{1}{2}(x+1)^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Solution particulière sur \mathbb{R} : $y_0(x) = -1$.

Solution générale sur \mathbb{R}

$$y(x) = C e^{\frac{1}{2}(x+1)^2} - 1 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

On aura $y(0) = 1$ si, et seulement si, $C = 2\sqrt{e}$.

b) Solution de l'équation homogène sur \mathbb{R} : $y(x) = C\sqrt{x^2 + 1} e^{\arctan x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
 Solution particulière sur \mathbb{R} : $y_0(x) = x - 1$ après recherche de solution de la forme $ax + b$.

Solution générale sur \mathbb{R}

$$y(x) = C\sqrt{x^2 + 1} e^{\arctan x} + x - 1 \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

On aura $y(0) = -1$ si, et seulement si, $C = 0$.

Exercice 5 : [énoncé]

a) C'est une équation différentielle linéaire. La solution générale homogène est

$$y(x) = \frac{\lambda}{1 - x}$$

b) On peut trouver une solution particulière par la méthode de la variation des constantes de la forme

$$y(x) = \frac{\lambda(x)}{1 - x}$$

avec λ fonction dérivable vérifiant

$$(1 - x) \frac{\lambda'(x)}{1 - x} = g(x) \quad \text{i.e.} \quad \lambda'(x) = g(x)$$

Par intégration de série entière de rayon de convergence $R \geq 1$

$$\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n \text{ convient}$$

On obtient alors la solution particulière (pour $x \in]-1; 1[$)

$$y(x) = \frac{1}{1 - x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}}{n} x^n$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{b_{k-1}}{k} x^n$$

Cette solution est développable en série entière avec un rayon de convergence R' au moins égal à 1 (car la série converge assurément sur $]-1; 1[$ par les calculs qui précèdent).

Exercice 6 : [\[énoncé\]](#)

La solution générale de l'équation étudiée est

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} \text{ avec } A(t) = \int_0^t a(u) du$$

Or pour tout $t \geq 0$,

$$|A(t)| \leq \int_0^t |a(u)| du \leq \int_0^{+\infty} |a(u)| du$$

et donc la fonction y est bornée.

Exercice 7 : [\[énoncé\]](#)

a) La solution générale de l'équation différentielle $y' + y = h$ est

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x h(t) e^t dt \right) e^{-x}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq A, |h(t)| \leq \varepsilon$$

On a alors

$$y(x) = \left(\lambda + \int_0^A h(t) e^t dt \right) e^{-x} + \int_A^x h(t) e^{t-x} dt$$

avec

$$\left| \int_A^x h(t) e^{t-x} dt \right| \leq \varepsilon \text{ et } \left(\lambda + \int_0^A h(t) e^t dt \right) e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

b) Posons $h = f' + f - \ell$. $f - \ell$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = h$ donc $f - \ell \xrightarrow{+\infty} 0$ puis $f \xrightarrow{+\infty} \ell$.

Exercice 8 : [\[énoncé\]](#)

Posons $g = f' + \alpha f$. La fonction f est solution de l'équation différentielle.

$$y' + \alpha y = g$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$y(x) = \lambda e^{-\alpha x} + \int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt$$

Ainsi, on peut écrire

$$f(x) = \lambda e^{-\alpha x} + \int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt$$

Il est immédiat que $\lambda e^{-\alpha x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ car $\text{Re } \alpha > 0$.

Étudions maintenant la limite du terme intégral.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction g tend vers 0 en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que

$$\forall t \geq A, |g(t)| \leq \varepsilon$$

On a alors pour tout $x \geq A$

$$\int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt = \int_0^A g(t) e^{\alpha(t-x)} dt + \int_A^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt$$

avec

$$\left| \int_A^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt \right| \leq \int_A^x \varepsilon e^{\text{Re}(\alpha)(t-x)} dt \leq \frac{\varepsilon}{\text{Re}(\alpha)} \left[e^{\text{Re}(\alpha)(t-x)} \right]_A^x \leq \frac{\varepsilon}{\text{Re}(\alpha)}$$

et

$$\left| \int_0^A g(t) e^{\alpha(t-x)} dt \right| = \left| \int_0^A g(t) e^{\alpha t} dt \right| e^{-\text{Re}(\alpha)x} = C t e^{-\text{Re}(\alpha)x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Pour x assez grand on a alors

$$\left| \int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{\text{Re}(\alpha)} + \varepsilon$$

Ainsi $\int_0^x g(t) e^{\alpha(t-x)} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ puis $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 9 : [\[énoncé\]](#)

a) Posons $z(t) = y(t + T)$. La fonction z est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) + \alpha z(t) = y'(t + T) + \alpha y(t + T) = \varphi(t + T) = \varphi(t)$$

La fonction z est donc solution de (E).

- b) Si y est T -périodique, on a évidemment $y(0) = y(T)$.
 Inversement, si $y(0) = y(T)$ alors y et z sont solutions d'un même problème de Cauchy posé en 0. Par unicité de ces solutions, on peut conclure $y = z$.
- c) On peut exprimer la solution générale de l'équation (E)

$$y(t) = \left(\lambda + \int_0^t \varphi(u) e^{\alpha u} du \right) e^{-\alpha t}$$

L'équation $y(0) = y(T)$ équivaut alors l'équation

$$\lambda = \left(\lambda + \int_0^T \varphi(u) e^{\alpha u} du \right) e^{-\alpha T}$$

Si $e^{\alpha T} \neq 1$, cette équation précédente possède une unique solution en l'inconnue λ ce qui détermine y .

La condition $e^{\alpha T} = 1$ est uniquement vérifiée pour les valeurs

$$\alpha = \frac{2ik\pi}{T} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 10 : [énoncé]

Sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* ,

$$E \iff y' = \frac{1}{x^2} y$$

Solution générale : $y(x) = C e^{-1/x}$.

Soit y une solution sur \mathbb{R} .

y est solution sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* donc il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x > 0, y(x) = C^+ e^{-1/x} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = C^- e^{-1/x}$$

Continuité en 0

$$y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } y(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^- \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nécessairement $y(0) = 0$ et $C^- = 0$.

Dérivabilité en 0

$$y'(x) = \frac{C^+}{x^2} e^{-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \text{ et } y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 \text{ donc } y'(0) = 0$$

Equation différentielle en 0 : $0^2 y'(0) - y(0) = 0$: ok.

Finalement

$$\exists C \in \mathbb{R}, y(x) = \begin{cases} C e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Inversement une telle fonction est solution.

Exercice 11 : [énoncé]

Solution générale sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*

$$y(x) = \frac{C + x}{e^x - 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Soit y une fonction solution sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* .

Il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, y(x) = \frac{C^+ + x}{e^x - 1} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \frac{C^- + x}{e^x - 1}$$

Pour que la fonction y puisse être prolongée par continuité en 0, il faut $C^+ = C^- = 0$ auquel cas

$$y(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ pour } x \neq 0$$

et la fonction se prolonge par $y(0) = 1$.

On vérifie que ce prolongement est de classe \mathcal{C}^∞ car inverse d'une fonction développable en série entière.

De plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x - 1) y(x) = x$$

donne par dérivation, la vérification de l'équation différentielle sur \mathbb{R} .

Finalement, il existe une seule solution sur \mathbb{R} :

$$y(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ prolongée par continuité avec } y(0) = 1$$

Exercice 12 : [énoncé]

Solution générale sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^*

$$y(x) = C \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$$

Après recollement en 0, solution générale sur \mathbb{R}

$$y(x) = C \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Exercice 13 : [énoncé]

Nommons E l'équation étudiée.

Sur \mathbb{R}_+ ,

$$E \iff y' + y = x$$

de solution générale $y(x) = C e^{-x} + x - 1$.

Sur \mathbb{R}_- ,

$$E \iff y' + y = 0$$

de solution générale $y(x) = C e^{-x}$.

Soit y solution de E sur \mathbb{R} .

Comme y est solution sur \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- , il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq 0, y(x) = C^+ e^{-x} + x - 1 \text{ et } \forall x \leq 0, y(x) = C^- e^{-x}$$

Définition en 0 : $y(0) = C^+ - 1 = C^-$ donc $C^+ = C^- + 1$.

Dérivabilité en 0 : $y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -C^+ + 1$ et $y'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -C^-$

donc $y'(0) = -C^+ + 1 = -C^-$.

Équation différentielle en 0 : $-C^+ + 1 + C^+ - 1 = \max(0, 0)$: ok

Finalement, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$y(x) = \begin{cases} C e^{-x} + x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ (C - 1) e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Inversement : ok

Exercice 14 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0; +\infty[$.

Sur $]0; 1[$ ou $]1; +\infty[$,

$$\int \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} dx = 3 \ln x + \ln |\ln x| + C^{te}$$

Solution générale sur $]0; 1[$ ou $]1; +\infty[$

$$y(x) = \lambda x^3 |\ln x|$$

Solution sur $]0; +\infty[$.

Soient $y:]0; 1[\cup]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$.

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0; 1[$ et $y(x) = \mu x^3 \ln x$ sur $]1; +\infty[$.

La continuité en 1 donne $y(1) = 0$ sans conditions sur λ et μ .

La dérivabilité en 1 donne $\lambda = \mu$.

Ainsi $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0; +\infty[$ qui est évidemment solution.

Exercice 15 : [énoncé]

a) Solution générale sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* :

$$y(x) = x \ln |x| + Cx \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Pas de recollement possible en 0.

b) Solution générale sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* :

$$y(x) = 1 + \frac{C}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en 0, solution générale sur \mathbb{R} : $y(x) = 1$.

c) Solution générale sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* :

$$y(x) = \frac{1}{2} x^4 + Cx^2 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en 0, solution générale sur \mathbb{R} :

$$y(x) = \begin{cases} C^+ x^2 + \frac{1}{4} x^4 & \text{si } x \geq 0 \\ C^- x^2 + \frac{1}{4} x^4 & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ avec } C^+, C^- \in \mathbb{R}$$

d) Solution générale sur \mathbb{R}_+^* ou \mathbb{R}_-^* :

$$y(x) = \frac{1}{x} + C \frac{x^2 + 1}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Via

$$\frac{x^2 - 1}{x(1 + x^2)} = \frac{2x^2 - (1 + x^2)}{x(1 + x^2)} = \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{1}{x}$$

Après recollement en 0, solution générale sur \mathbb{R} : $y(x) = -x$.

Exercice 16 : [énoncé]

a) Solution générale sur $I_k =]k\pi; (k + 1)\pi[$, $k \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \cos x + C \sin x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur \mathbb{R} :

$$y(x) = \cos x + C \sin x \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

b)) Solution générale sur $I_k =]k\pi; (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = C e^{1/\sin^2 x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur \mathbb{R} :

$$y(x) = \begin{cases} C_k e^{1/\sin^2 x} & \text{si } x \in I_k \\ 0 & \text{si } x = k\pi \end{cases} \text{ avec } (C_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$$

Exercice 17 : [énoncé]

a) Soit $I =]-\pi/2; \pi/2[$ le plus grand intervalle contenant où l'équation différentielle a un sens.

Posons $I^+ =]0; \pi/2[$ et $I^- =]-\pi/2; 0[$.

Solution générale sur I^+ : $y(x) = C^+ \sin x$.

Solution générale sur I^- : $y(x) = C^- \sin x$.

Cherchons les solutions définies sur I .

Analyse : Soit y une solution sur I , s'il en existe.

y est a fortiori solution sur I^+ et I^- donc :

$\exists C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = C^+ \sin x$ sur I^+ et $y(x) = C^- \sin x$ sur I^- .

Comme y doit être continue en 0, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = y(0) = 0$.

Pas d'informations sur C^+ ni C^- .

Comme y doit être dérivable en 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x} = C^+ = y'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x} = C^-.$$

Donc $C^+ = C^-$. Finalement $y(x) = C^+ \sin x$ sur I entier.

Synthèse : $y(x) = C \sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$ est bien solution sur I .

On aura $y(0) = 0 \iff C \cdot \sin(0) = 0$ ce qui est toujours vraie.

Il y a ici une infinité de solutions au problème de Cauchy.

b) On aura $y(0) = 1 \iff C \cdot \sin(0) = 1$ ce qui est impossible.

Il n'y a ici aucune solution au problème de Cauchy.

Exercice 18 : [énoncé]

Soit $I =]-\infty; -1[;]-1; 0[;]0; 1[$ ou $]1; +\infty[$.

Sur I , l'équation différentielle devient : $y' + \frac{2}{x(x^2-1)}y = \frac{x}{x^2-1}$.

La solution générale sur I est $\frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Après recollement en 1, 0 et -1 on conclut, pour tout intervalle I :

Si $1, 0, -1 \notin I$, $y(x) = \frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } 1, -1 \notin I \text{ et } 0 \in I, y(x) = \begin{cases} \frac{x^2 \ln|x| + C^+ x^2}{x^2-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x^2 \ln|x| + C^- x^2}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ avec } C^+, C^- \in \mathbb{R}.$$

Si $1 \in I$ ou $-1 \in I$, $y(x) = \frac{x^2 \ln|x|}{x^2-1}$.

Exercice 19 : [énoncé]

Sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* : $y(x) = C|x|^\alpha$.

Soit y une solution sur \mathbb{R} .

On a $y(x) = C^+ x^\alpha$ sur \mathbb{R}_+^* et $y(x) = C^- |x|^\alpha$ sur \mathbb{R}_-^* .

Si $\alpha < 0$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.

Si $\alpha = 0$, la limite en 0 donne $C^+ = C^-$ et on conclut que y est constante.

Inversement ok.

Si $\alpha > 0$, la limite en 0 donne $y(0) = 0$.

On a $y'(x) = \alpha C^+ x^{\alpha-1}$ sur \mathbb{R}_+^* et $y(x) = -\alpha C^- |x|^\alpha$ sur \mathbb{R}_-^* .

Si $\alpha < 1$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.

Si $\alpha = 1$, la limite en 0 implique $C^+ = -C^-$ et on conclut que y est linéaire.

Inversement ok.

Si $\alpha > 1$, la limite en 0 existe et est nulle ce qui permet d'affirmer $y'(0) = 0$

L'équation différentielle est bien vérifiée en 0.

$$\text{Inversement, lorsque } \alpha > 1, \text{ la fonction définie par } y(x) = \begin{cases} C^+ x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C^- (-x)^\alpha & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est solution.

Exercice 20 : [énoncé]

a) On résout l'équation différentielle linéaire étudiée et, par la méthode de variation de la constante, on obtient la solution générale suivante

$$g(x) = \lambda x + x \int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt$$

Par une intégration par parties, on peut écrire

$$g(x) = \lambda x - f(x) + x f(1) + x \int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, on a

$$\left| x \int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt \right| \leq \|f'\|_{\infty, [0;1]} x |\ln x|$$

et on obtient

$$g(x) \rightarrow -f(0)$$

Quand $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1}{x} (g(x) - g(0)) = \lambda - \frac{f(x) - f(0)}{x} + f(1) + \int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt$$

Le terme $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ converge vers $f'(0)$.

Si $f'(0) \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{]0;1]} \frac{f'(t)}{t} dt$ diverge et donc le terme $\int_1^x \frac{f'(t)}{t} dt$ diverge. On en déduit qu'alors g n'est pas dérivable en 0.

L'égalité $f'(0) = 0$ est une condition nécessaire à la dérivabilité de g en 0. Cette condition n'est pas suffisante. En effet considérons une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$

L'intégrale $\int_{]0;1]} \frac{f'(t)}{t} dt$ demeure divergente alors que $f'(0) = 0$.

b) Puisque f est de classe \mathcal{C}^2 et vérifie $f'(0) = 0$ on peut écrire

$$f(x) = f(0) + x^2 \varphi(x) \text{ pour tout } x > 0$$

avec $\varphi:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et convergeant vers $f''(0)/2$ en 0^+ . On a alors pour tout $x > 0$

$$g(x) = \lambda x + x f(0) - f(0) + x \int_1^x \varphi(t) dt$$

g est de classe \mathcal{C}^3 sur $]0; +\infty[$ car φy est de classe \mathcal{C}^2 .

On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = -f(0)$

$$g'(x) = \lambda + f(0) + x \varphi(x) + \int_1^x \varphi(t) dt$$

Quand $x \rightarrow 0^+$, g' converge et donc g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0; +\infty[$.

$$g''(x) = 2\varphi(x) + x\varphi'(x)$$

Or

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x^2} - 2 \frac{f(x) - f(0)}{x^3}$$

donc

$$g''(x) = \frac{f'(x)}{x} = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f''(0)$$

On en déduit que g est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0; +\infty[$

Exercice 21 : [énoncé]

a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Après résolution via variation de la constante, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{x + \lambda}{\ln x}$$

b) Par opérations, la fonction g est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[1/2; +\infty[$. Pour $x \in]-1; 1[$ on a le développement en série entière

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

et si $x \neq 0$, on obtient

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$$

Si l'on pose $g(0) = 1$, la relation précédente reste valable pour $x = 0$ et ainsi on a prolongé g en une fonction développable en série entière sur $] -1; 1[$. Ce prolongement est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1; 1[$ puis sur $] -1; +\infty[$.

c) La fonction g est à valeurs strictement positives et on peut donc introduire la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{g(x-1)}$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ et sur $]0; 1[$ ou $]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

Ainsi f est solution de (E) sur $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$ et enfin on vérifie aisément que l'équation différentielle (E) est aussi vérifiée quand $x = 1$.

Exercice 22 : [énoncé]

a) E est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de solution générale sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* :

$$y(x) = C |x|^\alpha$$

Comme y est solution sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* , il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0, y(x) = C^+ |x|^\alpha \text{ et } \forall x < 0, y(x) = C^- |x|^\alpha$$

b) Si $\alpha < 0$ alors

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^+ \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } y(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\longrightarrow} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^- \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

y peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^- = 0$ et alors $y(0) = 0$.

La solution correspondante est la fonction nulle qui est solution de E .

Si $\alpha = 0$ alors

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} C^+ \text{ et } y(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\longrightarrow} C^-$$

y peut être prolongée par continuité en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^-$ et alors $y(0) = C^+$.

La solution correspondante est une fonction constante qui inversement est solution de E .

Si $\alpha > 0$ alors

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ et } y(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\longrightarrow} 0$$

y peut être prolongée par continuité en 0 indépendamment de C^+ et C^- en posant $y(0) = 0$.

c) Si $\alpha \in]0; 1[$ alors

$$y'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^+ \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } y'(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\longrightarrow} \begin{cases} \pm\infty & \text{si } C^- \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En vertu du théorème du prolongement C^1 , la fonction y est dérivable en 0 si, et seulement si, $C^+ = C^- = 0$.

La solution correspondante est la fonction nulle qui est solution de E .

Si $\alpha = 1$ alors

$$y'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} C^+ \text{ et } y'(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\longrightarrow} -C^-$$

La fonction y est dérivable en 0 si, et seulement si, $C^+ = -C^-$.

La fonction correspondante est alors $x \mapsto C^+x$ sur \mathbb{R} qui est solution de E .

Si $\alpha > 1$ alors

$$y'(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ et } y'(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\longrightarrow} 0$$

La fonction prolongée est dérivable en 0 indépendamment de C^+ et C^- .

Cette fonction est alors solution de E sur \mathbb{R} car dérivable sur \mathbb{R} et vérifiant l'équation différentielle.

d) Si $\alpha < 0$ ou $0 < \alpha < 1$: seule la fonction nulle est seule solution sur \mathbb{R} .

Si $\alpha = 0$ alors les fonctions constantes sont les solutions de E sur \mathbb{R} .

Si $\alpha = 1$ alors les fonctions linéaires ($x \mapsto Cx$) sont les solutions de E sur \mathbb{R} .

Si $\alpha > 1$ alors les solutions de E sur \mathbb{R} sont les fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} C^+ |x|^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ C^- |x|^\alpha & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $C^+, C^- \in \mathbb{R}$

Exercice 23 : [énoncé]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En résolvant sur I l'équation différentielle

$$xy'(x) = \lambda y(x)$$

on obtient que $x \mapsto x^\lambda$ est une fonction propre de l'application φ . Pour une telle fonction, on a

$$xy'(x) = \lambda y(x)$$

donc en dérivant

$$xy''(x) + y'(x) - \lambda y'(x) = 0$$

puis

$$x^2y''(x) + xy'(x) - \lambda^2y(x) = 0$$

On en déduit que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{-\alpha}$ sont solutions sur I de l'équation différentielle E_α . Or cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène résolue en y'' , son ensemble solution est donc un plan vectoriel. Puisque les deux précédentes fonctions sont des solutions indépendantes, elles constituent une base de ce plan vectoriel.

La solution générale de E_α est donc

$$y(x) = \lambda x^\alpha + \mu x^{-\alpha} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 24 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène :

$$y(t) = (\lambda t + \mu) e^{-2t}.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)t e^{-2t} + \mu(t) e^{-2t}$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t)t e^{-2t} + \mu'(t) e^{-2t} = 0 \\ \lambda'(t)(1 - 2t) e^{-2t} - 2\mu'(t) e^{-2t} = \frac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \frac{-t}{1+t^2} \end{cases}$$

Les fonctions $\lambda(t) = \arctan t$ et $\mu(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2)$ conviennent.
Finalement, la solution générale des l'équation étudiée est :

$$y(t) = t \arctan(t) e^{-2t} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) e^{-2t} + (\lambda t + \mu) e^{-2t}$$

Exercice 25 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène :

$$y = \lambda \cos t + \mu \sin t.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t) \cos(t) + \mu(t) \sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos t + \mu'(t) \sin t = 0 \\ -\lambda'(t) \sin t + \mu'(t) \cos t = \tan t \end{cases}, \begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^2 t / \cos t \\ \mu'(t) = \sin t \end{cases}$$

Les fonctions

$$\lambda(t) = \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} dt = \sin t - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}$$

et

$$\mu(t) = -\cos t$$

conviennent car

$$\int \frac{1}{\cos t} dt = \int \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}.$$

Finalement, la solution générale de l'équation étudiée est :

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cos t \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} + \lambda \cos t + \mu \sin t$$

sur $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Exercice 26 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :

$$y = \lambda \cos t + \mu \sin t.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t) \cos(t) + \mu(t) \sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos t + \mu'(t) \sin t = 0 \\ -\lambda'(t) \sin t + \mu'(t) \cos t = \tan^2 t \end{cases}, \begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^3 t / \cos^2 t \\ \mu'(t) = \sin^2 t / \cos t \end{cases}$$

Les fonctions

$$\lambda(t) = -\frac{1}{\cos t} - \cos t$$

et

$$\mu(t) = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} - \sin t$$

conviennent car

$$\int \frac{1}{\cos t} dt = \int \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}.$$

Finalement, la solution générale de l'équation étudiée est :

$$y(t) = -2 + \frac{1}{2} \sin t \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} + \lambda \cos t + \mu \sin t$$

sur $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$.

Exercice 27 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :

$$y = A \cos x + B \sin x.$$

Méthode de variation des constantes

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \cot x \end{cases}$$

Après résolution et intégration

$$y(x) = -\frac{1}{2} \sin x \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} + A \cos x + B \sin x$$

Exercice 28 : [énoncé]

a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :

$$y = \lambda \cos t + \mu \sin t.$$

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t) \cos(t) + \mu(t) \sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos t + \mu'(t) \sin t = 0 \\ -\lambda'(t) \sin t + \mu'(t) \cos t = f(t) \end{cases}$$

$\cos t \times (1) - \sin t \times (2)$ donne $\lambda'(t) = -f(t) \sin t$.

$\sin t \times (1) + \cos t \times (2)$ donne $\mu'(t) = f(t) \cos t$.

Choisissons $\lambda(t) = \int_0^t -f(u) \sin u \, du$ et $\mu(t) = \int_0^t f(u) \cos u \, du$

ce qui donne la solution particulière :

$$y(t) = \int_0^t f(u) (\sin t \cos u - \sin u \cos t) \, du = \int_0^t f(u) \sin(t - u) \, du.$$

La solution générale de l'équation est

$$y(t) = \int_0^t f(u) \sin(t - u) \, du + \lambda \cos(t) + \mu \sin(t).$$

b) $y(0) = 0$ donne $\lambda = 0$.

Avec les notations précédentes :

$$y'(t) = -\lambda(t) \sin t + \mu(t) \cos t - \lambda \sin t + \mu \cos t$$

donc $y'(0) = \mu(0) + \mu = \mu$ puis $\mu = 0$.

Finalement : $y(t) = \int_0^t f(u) \sin(t - u) \, du$.

Exercice 29 : [énoncé]

a) La solution générale de l'équation homogène associée est

$$y(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$$

On peut avoir l'intuition de trouver une solution particulière de la forme

$y(t) = \alpha \cos(nt)$ et, en effet on obtient,

$$y(t) = \frac{-1}{n^2 - 1} \cos(nt)$$

solution particulière lorsque $n \neq 1$. La solution générale est alors

$$y(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t + \frac{1}{1 - n^2} \cos(nt)$$

Quand $n = 1$, on applique la méthode de variation des constantes. On obtient une solution particulière en résolvant

$$\begin{cases} \lambda'(t) \cos t + \mu'(t) \sin t = 0 \\ -\lambda'(t) \sin t + \mu'(t) \cos t = \cos(nt) \end{cases}$$

Par les formules de Cramer, on obtient

$$\lambda'(t) = -\sin t \cos t \text{ et } \mu'(t) = \cos^2(t)$$

Alors

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2} \sin^2 t \text{ et } \mu(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin(t) \cos(t)}{2}$$

conviennent et l'on obtient la solution particulière

$$y(t) = \frac{t}{2} \sin t$$

puis la solution générale

$$y(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t + \frac{1}{2} t \sin t$$

b) Soit

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{2} t \sin t + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{1 - n^2} \cos(nt)$$

Sans difficultés, on peut dériver deux fois sous le signe somme car il y a convergence normale de la série des dérivées secondes et convergences simples intermédiaires. On peut alors conclure que f est de classe \mathcal{C}^2 et solution de l'équation différentielle étudiée. La solution générale de celle-ci est alors

$$y(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t + f(t)$$

Exercice 30 : [énoncé]

Posons $g = f + f''$. f est évidemment solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = g$$

Après application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de cette équation est

$$y(x) = a \cos x + b \sin x + \int_0^x g(t) \sin(x - t) \, dt$$

Pour une telle solution,

$$y(x + \pi) + y(x) = \int_x^{x+\pi} g(t) \sin(x + \pi - t) \, dt \geq 0$$

Ainsi f vérifie

$$f(x) + f(x + \pi) \geq 0$$

Exercice 31 : [énoncé]

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont de classe \mathcal{C}^∞ car f l'est. Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

Cette solution est 2π -périodique si, et seulement si,

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = \int_0^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt$$

i.e. $\int_x^{x+2\pi} f(t) \sin(x-t) dt = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille (\sin, \cos) ainsi que la 2π -périodicité de f , cela équivaut à la condition

$$\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos t dt = 0$$

Exercice 32 : [énoncé]

Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

Pour conclure, il suffit de justifier que $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$ est bornée. Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t) \sin(x-t) dt = f(x) - f(0) \cos x - \int_0^x f'(t) \cos(x-t) dt$$

Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer f croissante et donc $f'(t) \geq 0$. Puisque $-1 \leq \cos(x-t) \leq 1$,

$$f(0) - f(x) \leq \int_0^x f'(t) \cos(x-t) dt \leq f(x) - f(0)$$

puis

$$f(0)(1 - \cos x) \leq \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt \leq 2f(x) - f(0)(1 + \cos x)$$

La fonction f étant bornée (car convergente en $+\infty$), il en est de même de $x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$.

Exercice 33 : [énoncé]

a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 à coefficients constants de solution homogène

$$y = A \cos x + B \sin x$$

La méthode de variation des constantes propose une solution particulière de la forme

$$y(x) = A(x) \cos x + B(x) \sin x$$

avec A et B fonctions dérivables solutions du système

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = 1/x \end{cases}$$

En faisant $\cos(x) \times (1) - \sin(x) \times (2)$, on détermine $A'(x)$ et $B'(x)$ s'obtient de façon analogue

$$\begin{cases} A'(x) = -\sin x/x \\ B'(x) = \cos x/x \end{cases}$$

On peut alors proposer

$$A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ et } B(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

où les intégrales introduites ont le bon goût de converger...

La solution générale de l'équation différentielle est alors

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

b) Posons $u(x, t) = e^{-tx}/(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0; +\infty[$.

$x \mapsto u(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ pour chaque $t \in [0; +\infty[$

$t \mapsto u(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$ et

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0; +\infty[$. Par domination f est définie et continue sur $[0; +\infty[$.

De plus, $x \mapsto u(x, t)$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+ pour chaque $t \in [0; +\infty[$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{-t e^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2}$$

La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0; +\infty[$.

La dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en t .
Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} \leq e^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment, f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0; +\infty[$ et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{t^2}{1+t^2} dt$$

On vérifie alors

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

de sorte que f est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = A \cos x + B \sin x + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

On observe

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$$

donc par encadrement $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ ce qui entraîne $A = B = 0$.

Ainsi

$$\forall x > 0, f(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

Séparément, on calcule $f(0)$

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

c) Par convergence de l'intégrale, quand $x \rightarrow 0^+$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

De plus

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt + \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt = C^{te} + \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt$$

avec

$$\left| \int_x^1 \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$$

donc

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \rightarrow 0$$

Ainsi en passant à la limite en 0 l'expression précédente de $f(x)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 34 : [énoncé]

a) Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S .

La fonction S est solution sur $] -R; R[$ de l'équation différentielle

Sur $] -R; R[$,

$$S''(x) + 2xS'(x) + 2S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n)x^n$$

Par conséquent, S est solution de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{-2}{n+2} a_n$$

ce qui donne

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!} a_0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1) \dots 3} a_1 = \frac{(-1)^{p+1} 4^p p!}{(2p+1)!} a_1$$

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.

Une telle série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car

$a_{2p} = O(1/p!)$ et $a_{2p+1} = O(4^p/p!)$.

De plus par les calculs ci-dessus elle est solution de l'équation différentielle proposée sur \mathbb{R} .

b) Les solutions paires sont obtenue pour $a_{2p+1} = 0$. Cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 e^{-x^2}$$

Exercice 35 : [énoncé]

Soit y la somme de la série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence R supposé > 0 . $4(1-t^2)y''(t) - 4ty'(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (4(n+2)(n+1)a_{n+2} - (4n^2 - 1)a_n) t^n$ donc y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{(n-1/2)(n+1/2)}{(n+1)(n+2)} a_n$$

donc $a_{2p} = \binom{1/2}{2p} a_0$ et $a_{2p+1} = \binom{1/2}{2p+1} a_1$.

Or personne, oh non personne, n'ignore que

$$\sqrt{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} t^n \text{ et } \sqrt{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} t^n$$

avec un rayon de convergence égal à 1.

En prenant $a_0 = a_1 = 1$, on obtient la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t}$.

En prenant $a_0 = 1$ et $a_1 = -1$, on obtient $t \mapsto \sqrt{1-t}$.

Ces deux fonctions sont solutions de l'équation étudiée (car $R = 1$) et, étant indépendantes, elles constituent un système fondamental de solutions. La solution générale s'exprime

$$y(t) = \lambda \sqrt{1+t} + \mu \sqrt{1-t}$$

Exercice 36 : [énoncé]

a) Soit $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière solution de rayon de convergence $R > 0$.

Sur $] -R; R[$, la fonction y est de classe \mathcal{C}^∞ et

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \text{ et } y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

de sorte que

$$(1+t^2)y''(t) + 4ty'(t) + 2y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n) t^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction y est solution de l'équation étudiée sur $] -R; R[$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -a_n$$

ce qui donne

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = (-1)^p a_0 \text{ et } a_{2p+1} = (-1)^p a_1$$

et on obtient

$$y(t) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p+1} = \frac{a_0 + a_1 t}{1+t^2}$$

Puisque la série entière écrite est de rayon de convergence $R \geq 1$, on peut assurer que les fonctions proposées sont solutions sur $] -1; 1[$ à l'équation étudiée. Cela fournit un système fondamental de solutions sur $] -1; 1[$ qu'il suffit de réinjecter dans l'équation pour affirmer que ces fonctions forment aussi un système fondamental de solution sur \mathbb{R} .

Puisque l'espace des solutions de cette équation homogène est de dimension 2, on peut conclure que la solution générale est

$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{1+t^2}$$

b) La méthode de variation des constantes nous amène à rechercher une solution particulière

$$y(t) = \frac{\lambda(t) + \mu(t)t}{1+t^2}$$

avec λ et μ fonctions dérivables solution du système

$$\begin{cases} \frac{\lambda'(t)}{1+t^2} + \frac{\mu'(t)t}{1+t^2} = 0 \\ -\frac{2t\lambda'(t)}{(1+t^2)^2} + \frac{\mu'(t)(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

On obtient $\lambda'(t) = -\frac{t}{1+t^2}$ et $\mu'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ puis

$$y(t) = \frac{t \arctan t - \ln \sqrt{1+t^2}}{1+t^2}$$

Cette solution particulière permet ensuite d'exprimer la solution générale.

Exercice 37 : [énoncé]

a) Par analyse synthèse, on obtient

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$$

de rayon de convergence $R = +\infty$.

b) $h(0) = 1$ et par application du critère spécial des séries alternées à la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n$$

on obtient

$$-2 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n < -1$$

et donc $h(2) < 0$. On en déduit que h s'annule sur $]0; 2[$.

La fonction h est dérivable et

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!} x^{n-1}$$

On peut à nouveau appliquer le critère spécial des séries alternées à cette série pour tout $x \in]0; 2[$ et on en déduit $h'(x) < 0$.

Exercice 38 : [énoncé]

Par dérivation d'un déterminant

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) \end{vmatrix}$$

donc

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) - b(t)f_1(t) & -a(t)f_2'(t) - b(t)f_2(t) \end{vmatrix}$$

puis

$$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) & -a(t)f_2'(t) \end{vmatrix} = -a(t) \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$$

Ainsi w est solution de l'équation différentielle

$$w' + a(t)w = 0$$

Exercice 39 : [énoncé]

a) Un simple calcul de vérification.

b) Le wronskien de deux solutions de l'équation homogène (E) est solution de l'équation différentielle

$$tw'(t) + (1 - 2t)w(t) = 0$$

Après résolution, on obtient

$$w(t) = \lambda \frac{e^{2t}}{t} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Soit ψ une solution indépendante de φ (la théorie assure qu'il en existe) et w le wronskien de φ et ψ . Quitte à multiplier ψ par une constante ad hoc, on peut supposer

$$w(t) = \frac{e^{2t}}{t}$$

et la fonction ψ apparaît solution de l'équation différentielle

$$\varphi\psi' - \psi\varphi' = w(t)$$

c'est-à-dire

$$e^t\psi' - e^t\psi = w(t)$$

Après résolution, on obtient

$$\psi(t) = \ln(t) e^t$$

Le couple (φ, ψ) constituant un système fondamental de solutions, on peut exprimer la solution générale

$$y(t) = (\lambda \ln(t) + \mu) e^t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 40 : [énoncé]

a) f est continue, si f n'est pas de signe constant alors f s'annule.

b) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -q(x)f(x) \leq 0$$

c) L'équation est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- d) Considérons $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$.
 g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. Or f' est décroissante, on peut donc dresser le tableau de variation de g et puisque $g(a) = 0$, constater

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$$

- e) Si $f'(a) \neq 0$ alors f étant en dessous de sa tangente prend des valeurs négatives, c'est impossible.
 On en déduit que

$$\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = 0$$

donc f est constante et $f'' = 0$.

Pour que f vérifie l'équation

$$y'' + q(x)y = 0$$

(sachant $q \neq 0$) il est nécessaire que f soit constante égale à 0.
 C'est absurde.

Exercice 41 : [énoncé]

Par l'absurde :

S'il existe y une solution sur \mathbb{R} de $y'' + q(x)y = 0$ qui ne s'annule pas.

Deux cas sont possibles : y est positive ou y est négative.

Si y est positive alors $y'' \leq 0$.

La fonction y est donc concave et sa courbe représentative est en dessous de chacune de ses tangentes.

Si y possède une tangente de pente non nulle, y prend des valeurs négatives, exclu.

Par suite y est nécessairement constante et alors $y'' = 0$ puis $q(x)y(x) = 0$

implique que y est constante égale à 0. Absurde.

Si y est négative, le même raisonnement permet de conclure.

Exercice 42 : [énoncé]

Par l'absurde, si f admet une infinité de zéros, on peut construire une suite (x_n) formée de zéros de f deux à deux distincts. Puisque $[a; b]$ est compact, on peut extraire de cette suite (x_n) , une suite convergente que nous noterons encore (x_n) . Soit c la limite de (x_n) . Par continuité, on a $f(c) = 0$.

En appliquant le théorème de Rolle à f entre x_n et x_{n+1} , on détermine c_n compris entre x_n et x_{n+1} tel que $f'(c_n) = 0$. Par encadrement, $c_n \rightarrow c$ et par continuité $f'(c) = 0$.

Le problème de Cauchy linéaire formé par l'équation (E) et les conditions initiales

$$y(c) = 0 \text{ et } y'(c) = 0$$

possède une unique solution qui est la fonction nulle.

La fonction f est donc nulle : c'est absurde.

Exercice 43 : [énoncé]

Soit y une solution de l'équation étudiée possédant une infinité de racines.

Nous allons montrer qu'il existe $a \in [0; 1]$ vérifiant $y(a) = y'(a) = 0$.

Il est possible de former une suite (x_n) de racines deux à deux distinctes de la fonction y . Puisque la suite (x_n) est une suite d'éléments du compact $[0; 1]$, elle possède une suite extraite convergente que nous noterons encore (x_n) . Ainsi on obtient une suite d'éléments deux à deux distincts de $[0; 1]$ vérifiant

$$x_n \rightarrow a \in [0; 1], \forall n \in \mathbb{N}, y(x_n) = 0$$

Par continuité de la fonction y , on obtient $y(a) = 0$.

Par application du théorème de Rolle entre x_n et x_{n+1} (qui sont distincts) il existe c_n compris entre x_n et x_{n+1} vérifiant $y'(c_n) = 0$. Par encadrement $c_n \rightarrow a$ et par continuité de y' , on obtient $y'(a) = 0$.

Finalement y apparaît comme solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(a) = y'(a) = 0 \end{cases}$$

Or la fonction nulle est aussi évidemment solution.

Par unicité de la solution sur $[0; 1]$ à ce problème de Cauchy, on peut conclure que y est la fonction nulle.

Exercice 44 : [énoncé]

- a) Par l'absurde supposons que g possède un zéro non isolé a . Il existe alors une suite (x_n) de zéros de g distincts de a convergeant vers a . Puisque $g(x_n) = 0$, à la limite $g(a) = 0$. Puisque

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

on a aussi

$$g'(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} = 0$$

Ainsi $g(a) = g'(a) = 0$ et donc g est la fonction nulle car cette dernière est l'unique solution de l'équation linéaire d'ordre 2 E vérifiant les conditions initiales $y(a) = y'(a) = 0$.

b) Posons

$$\varphi(x) = (x_2 - x) \int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t) dt + (x - x_1) \int_x^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t) dt$$

La fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(x) = - \int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t) dt + \int_x^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t) dt$$

La fonction φ est donc deux fois dérivable et

$$\varphi''(x) = (x_1 - x_2)f(x)g(x)$$

Puisque g est solution de l'équation E , on obtient

$$\varphi''(x) = (x_2 - x_1)g''(x)$$

et donc

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x) + \alpha x + \beta$$

Or les fonctions φ et g s'annulent toutes deux en x_1 et x_2 donc $\alpha = \beta = 0$ puis

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x)$$

c) Soit $\alpha = \max_{[x_1; x_2]} |g| \neq 0$. Pour x tel que $|g(x)| = \alpha$, la relation précédente donne

$$\alpha(x_2 - x_1) \leq (x_2 - x) \left| \int_{x_1}^x (t - x_1)f(t)g(t) dt \right| + (x - x_1) \left| \int_x^{x_2} (x_2 - t)f(t)g(t) dt \right|$$

puis

$$\alpha(x_2 - x_1) \leq \alpha(x_2 - x)(x - x_1) \int_{x_1}^x |f(t)| dt + \alpha(x_2 - x)(x - x_1) \int_x^{x_2} |f(t)| dt = \alpha(x_2 - x)(x - x_1) \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt$$

On en déduit

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \geq \frac{4}{x_2 - x_1}$$

car

$$(x_2 - x)(x - x_1) \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$$

Exercice 45 : [énoncé]

a) La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 et

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt = f'(0) - \int_0^x q(t)f(t) dt$$

Puisque la fonction q est intégrable sur $[0; +\infty[$ et puisque f est bornée, on peut affirmer que la fonction qf est intégrable sur $[0; +\infty[$. Par suite l'intégrale de l'expression précédente de $f'(x)$ converge quand $x \rightarrow +\infty$. On en déduit que f' converge en $+\infty$.

Posons ℓ sa limite.

Si $\ell > 0$ alors il existe A assez grand tel que pour tout $x \geq A$ on a $f'(x) \geq \ell/2$.

On a alors

$$f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t) dt \geq f(A) + \frac{\ell}{2}(x - A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui contredit l'hypothèse f bornée.

De même, $\ell < 0$ est absurde et il reste donc $\ell = 0$.

b) En dérivant

$$w' = f''g + f'g' - f'g' - f''g = 0$$

car f et g sont solutions de (E) .

On en déduit que le wronskien w est constant et puisque les fonctions f et g sont bornées, leurs dérivées f' et g' convergent vers 0 en $+\infty$ et donc $w \xrightarrow{+\infty} 0$.

Ainsi le wronskien w est constant égal à 0 et donc les fonctions f et g sont liées.

On en déduit que l'équation différentielle E possède une solution non bornée.

Exercice 46 : [énoncé]

a) Si φ_1 possède une solution non isolée x_0 alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de φ_1 deux à deux distincts convergeant vers x_0 . En appliquant le théorème de Rolle entre les deux termes distincts x_n et x_{n+1} , on détermine une suite (c_n) convergeant vers x_0 formée de zéros de φ_1' . En passant la relation $\varphi'(c_n) = 0$ à la limite on obtient $\varphi'(x_0) = 0$. Ainsi φ_1 se comprend comme la solution du problème de Cauchy constitué de l'équation différentielle $y'' + q_1(x) = 0$ et des conditions initiales $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Or ce problème de Cauchy possède une solution unique et celle-ci est la fonction nulle, cas que l'énoncé exclut.

b) On suppose les zéros de a et b consécutifs donc φ_1 est de signe constant sur $[a; b]$.

Quitte à considérer $-\varphi_1$ on peut supposer $\varphi_1 \geq 0$ sur $[a; b]$ et, sachant $\varphi_1'(a), \varphi_1'(b) \neq 0$ car φ_1 est non identiquement nulle, on a $\varphi_1'(a) > 0$ et $\varphi_1'(b) < 0$.

Si φ_2 n'est pas de signe constant sur $[a; b]$ alors, par le théorème de valeurs intermédiaires, φ_2 s'annule sur $]a; b[$.

Si en revanche φ_2 est de signe constant sur $[a; b]$ alors, quitte à considérer $-\varphi_2$, on peut supposer $\varphi_2 \geq 0$ sur $[a; b]$ afin de fixer les idées. Considérons alors la fonction donnée par

$$w(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)$$

La fonction w est décroissante car

$$w'(t) = \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_2(t)\varphi_1''(t) = (q_1(t) - q_2(t))\varphi_1(t)\varphi_2(t) \leq 0$$

Or $w(a) = -\varphi_2(a)\varphi_1'(a) \leq 0$ et $w(b) = -\varphi_2(b)\varphi_1'(b) \geq 0$ donc nécessairement $\varphi_2(a) = \varphi_2(b) = 0$.

- c) Il suffit d'appliquer ce qui précède à $q_1(x) = 1$ et $q_2(x) = e^x$ sur $I = \mathbb{R}_+$ sachant que $\varphi_1(x) = \sin(x - a)$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$ et s'annule en a et $a + \pi$.

Exercice 47 : [\[énoncé\]](#)

L'équation E_0 est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène.

- a) y^2 est deux fois dérivable et

$$(y^2)''(x) = 2y(x)y''(x) + 2(y'(x))^2 = 2e^x(y(x))^2 + 2(y'(x))^2 \geq 0$$

Par suite la fonction y^2 est convexe.

Si $y(0) = y(1) = 0$ alors, sachant que y^2 est convexe, le graphe de y^2 est en dessous de chacune de ses cordes et donc y^2 est nulle sur $[0; 1]$. On en déduit que y est nulle sur $[0; 1]$ et en particulier $y(0) = y'(0) = 0$. Or la fonction nulle est la seule solution de l'équation différentielle E_0 vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. On en déduit que la fonction y est nulle sur \mathbb{R} .

- b) Le wronskien en 0 des solutions y_1, y_2 est

$$w(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = -y_2(0)$$

Si $y_2(0) = 0$ alors, sachant $y_2(1) = 0$, le résultat qui précède entraîne $y_2 = \tilde{0}$.

Or $y_2'(1) = 1 \neq 0$. C'est impossible et donc $w(0) = y_2(0) \neq 0$.

On en déduit que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0 .

Notons que l'on démontre par le même argument que $y_1(1) \neq 0$.

- c) Soit \tilde{y} une solution particulière de l'équation E .

La solution générale de E est de la forme $y(x) = \tilde{y}(x) + \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$.

Cette solution vérifie $y(0) = y(1) = 0$ si, et seulement si,

$$\tilde{y}(0) + \lambda_2 y_2(0) = 0 \text{ et } \tilde{y}(1) + \lambda_1 y_1(1) = 0$$

Ces deux équations déterminent λ_1 et λ_2 de façon unique puisque $y_1(1), y_2(0) \neq 0$.

Exercice 48 : [\[énoncé\]](#)

- a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur \mathbb{R} . Les conditions initiales proposées déterminent alors une solution unique définie sur \mathbb{R} .
- b) Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive au voisinage de 0 et par la satisfaction de l'équation différentielle, on peut affirmer que u'' est strictement négative au voisinage de 0. La fonction u' étant alors strictement décroissante au voisinage de 0 et vérifiant $u'(0) = 0$, les existences de α et β sont assurées. Par l'absurde, supposons que la fonction u ne s'annule par sur \mathbb{R}_+ . La fonction u est alors positive et u'' est négative sur \mathbb{R}_+ . La fonction u' étant donc décroissante sur \mathbb{R}_+ , on a

$$\forall t \geq \beta, u'(t) \leq u'(\beta)$$

En intégrant

$$\forall x \geq \beta, u(x) - u(\beta) \leq u'(\beta)(x - \beta)$$

Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$.

On en déduit que u s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}_+ (et cette annulation est nécessairement sur \mathbb{R}_+^*)

De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}_-^* (et on peut même montrer que la fonction u est paire...)

- c) Considérons l'ensemble

$$A = \{t > 0 \mid u(t) = 0\}$$

C'est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} , elle admet donc une borne inférieure δ . Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que

$$t_n \rightarrow \delta$$

Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geq 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A .

De même on obtient γ .

d) Grâce à l'équation différentielle

$$W' = u''v - uv'' = 0$$

Le wronskien W est donc constant mais peu importe... puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant.

Or

$$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta)$$

Puisque u est strictement positive sur $]\gamma; \delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit

$$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$

ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma; \delta[$.

e) Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $[\gamma; \delta]$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $[\gamma; \delta]$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $[\gamma + n\pi; \delta + n\pi]$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.

Exercice 49 : [\[énoncé\]](#)

a) Par l'absurde, supposons que f s'annule et introduisons

$$b = \inf \{t \in [a; +\infty[\mid f(t) = 0\}$$

Par continuité de f , on a $f(b) = 0$ et sachant $f(a) > 0$, on a aussi.

$$\forall t \in [a; b], f(t) \geq 0$$

On en déduit $f''(t) = q(t)f(t) \geq 0$ et donc f' est croissante sur $[a; b]$. Sachant $f'(a) > 0$, la fonction f est croissante sur $[a; b]$. Ceci est incompatible avec la valeur $f(b) = 0$. C'est absurde.

On en déduit que f ne s'annule pas sur $[a; +\infty[$ et est donc strictement positive. Comme au dessus, on retrouve que f' est croissante et donc strictement positive. Enfin

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \geq f(a) + f'(a)(x - a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

b) $(u'v - uv')' = u''v - uv'' = 0$. La fonction $u'v - uv'$ est donc constante égale à -1 (qui est sa valeur en a).

Puisque $v(a) = 0$ et $v'(a) = 1$, les fonctions v et v' sont strictement positives sur un intervalle de la forme $]a; a + h[$ (avec $h > 0$). En appliquant la question précédente avec $a + h$ plutôt que a , on assure que v et v' sont strictement positives sur $]a; +\infty[$. On peut donc introduire les fonctions u/v et u'/v' . Aussi

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2} \leq 0 \text{ et } \left(\frac{u'}{v'}\right)' = \frac{u''v' - u'v''}{v'^2} = \frac{q}{v'^2} \geq 0$$

On a

$$\frac{u}{v} - \frac{u'}{v'} = \frac{uv' - u'v}{vv'} = \frac{1}{vv'}$$

avec $v \xrightarrow{+\infty} +\infty$ et $v' \geq v'(a) = 1$. On en déduit que les fonctions u/v et u'/v' ont la même limite en $+\infty$ (ces limites existent assurément par monotonie). Aussi cette limite est finie car la fonction u/v est au dessus de la fonction u'/v' . Nous noterons ℓ cette limite.

c) Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$g = \lambda u + \mu v$$

car (u, v) forme un système fondamentale de solutions de l'équation linéaire (E) .

La condition $g(a) = 1$ impose $\lambda = 1$.

Les conditions g strictement positive et décroissante imposent respectivement

$$u + \mu v > 0 \text{ et } u' + \mu v' \leq 0$$

La constante μ est alors nécessairement $-\ell$.

Enfin $g = u - \ell v$. La réciproque est immédiate.

d) Le changement de fonction proposé transpose l'équation $x^4 y''(x) = y(x)$ en $z''(1/x) = z(1/x)$.

La solution générale de l'équation (E) sur $[1; +\infty[$ est donc

$$y(x) = x \left(\lambda e^{1/x} + \mu e^{-1/x} \right)$$

Par développement limité

$$y(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x((\lambda + \mu) + o(1))$$

Pour que la fonction g décroisse en restant positive, il est nécessaire que $\lambda + \mu = 0$.

Sachant $y(1) = \lambda e + \mu/e$, on obtient

$$g(x) = \frac{ex}{e^2 - 1} (e^{1/x} - e^{-1/x})$$

On aurait aussi pu calculer

$$u(x) = x e^{1/x-1} \text{ et } v(x) = \frac{x}{2} (-e^{1/x-1} + e^{-1/x+1})$$

et reprendre ce qui précède.

Exercice 50 : [énoncé]

Supposons f solution.

$$f(x) = -1 - 2x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt$$

On a $f(0) = -1$ et f dérivable avec

$$f'(x) = -2 \int_0^x f(t) dt - 2xf(x) + xf(x)$$

Par suite $y: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$. Ceci détermine y et donc f de manière unique.

En recherchant les solutions développables en séries entières, on obtient $y(x) = -xe^{-x^2/2}$ puis

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}$$

Exercice 51 : [énoncé]

a) On peut écrire

$$f(x) = 1 - x - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt$$

Par opération sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 , f est de classe \mathcal{C}^1 .

b) Soit f solution. f est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(x) = -1 - \int_0^x f(t) dt$$

On en déduit que f est de classe \mathcal{C}^2 et

$$f''(x) + f(x) = 0$$

Ainsi la fonction f est de la forme

$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$$

De plus, on observe $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ ce qui détermine λ et μ :

$$\lambda = 1 \text{ et } \mu = -1$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $x \mapsto \cos x - \sin x$ est solution, soit en remontant les calculs (ce qui est possible) soit en refaisant ceux-ci.

Exercice 52 : [énoncé]

Si f est solution alors f est de classe \mathcal{C}^1 et on a :

$$f'(x) = xf(x) \text{ et } f(0) = 1$$

Après résolution de l'équation différentielle sous-jacente, on obtient

$$f(x) = e^{x^2/2}$$

Inversement, $f(x) = e^{x^2/2}$ définit une solution du problème posé.

Exercice 53 : [énoncé]

Remarquons

$$\int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = \cos x \int_0^x f(t) \cos t dt + \sin x \int_0^x f(t) \sin t dt$$

Si f est solution alors

$$f(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt$$

et donc $f(0) = 1$.

f est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = -2 \sin x \int_0^x f(t) \cos t \, dt + 2 \cos x \int_0^x f(t) \sin t \, dt + 2f(x)$$

et $f'(0) = 2$.

f est alors deux fois dérivable et

$$f''(x) = 1 - f(x) + 2f'(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 1$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$y(x) = (\lambda x + \mu) e^x + 1$$

Cela conduit à $f(x) = 2x e^x + 1$.

Inversement, soit par calculs, soit en remontant le raisonnement, on peut affirmer que la fonction proposée est solution.

Exercice 54 : [énoncé]

Soit f une solution du problème posé.

Posons $g(x) = f(x) + f(-x)$. La fonction g est une fonction paire, deux fois dérivable et solution de : $y'' + y = 0$. Par suite $g(x) = C \cos(x)$

Posons $h(x) = f(x) - f(-x)$. La fonction h est une fonction impaire, deux fois dérivable et solution de : $y'' - y = 2x$. Par suite $h(x) = D \operatorname{sh} x - 2x$.

On en déduit $f(x) = C \cos x + D \operatorname{sh} x - x$.

Inversement de telles fonctions sont bien solutions.

Exercice 55 : [énoncé]

Soit f une fonction solution. f est dérivable et

$$f'(x) = f(1/x)$$

donc f' est encore dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x) = -\frac{1}{x^2} f(x)$$

La fonction f apparaît alors comme étant solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle

$$E: x^2 y'' + y = 0$$

E est une équation différentielle d'Euler. Réalisons le changement de variable $t = \ln x$.

Soient $y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$z(t) = y(e^t)$$

z est deux fois dérivable et

$$y(x) = z(\ln x)$$

$$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x)$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)$$

y est solution sur \mathbb{R}_+^* de E si, et seulement si, z est solution sur \mathbb{R} de

$$F: z'' - z' + z = 0$$

F est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène de solution générale

$$z(x) = \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) e^{x/2}$$

La solution générale de E sur \mathbb{R}_+^* est donc

$$y(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right)$$

Revenons à la fonction f . Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \sqrt{x} \left(\lambda \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + \mu \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right)$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left((\lambda + \mu\sqrt{3}) \cos \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} + (\mu - \lambda\sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3} \ln x}{2} \right)$$

et donc

$$f'(x) = f(1/x) \iff \begin{cases} \lambda + \mu\sqrt{3} = 2\lambda \\ \lambda\sqrt{3} - \mu = 2\mu \end{cases} \iff \lambda = \mu\sqrt{3}$$

Finalement, les solutions sont les fonctions f données par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\sqrt{x} \cos \left(\frac{\sqrt{3} \ln x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Exercice 56 : [énoncé]

Les éléments de E sont les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \alpha \cos(x) \text{ vérifiant } y(0) = \alpha$$

L'équation différentielle est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

La fonction $x \mapsto \frac{\alpha}{2}x \sin x$ est solution particulière et la solution générale est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{\alpha}{2}x \sin x$$

Les solutions vérifiant la condition $y(0) = \alpha$ sont les fonctions données par

$$y(x) = \alpha \left(\cos x + \frac{1}{2}x \sin x \right) + \mu \sin x$$

On en déduit que l'espace E est de dimension 2.

Exercice 57 : [énoncé]

Soit u une fonction solution.

Posons

$$U(x) = \int_0^x u(t) dt$$

La fonction U est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie

$$\begin{cases} U(0) = 0 \\ U'(x) = \lambda U(x) + f(x) \end{cases}$$

La résolution de l'équation différentielle linéaire $U' = \lambda U + f(x)$ donne par pour solution générale

$$U(x) = Ce^{-\lambda x} + \left(\int_0^x f(t)e^{\lambda t} dt \right) e^{-\lambda x}$$

La condition initiale $U(0) = 0$ détermine la constante C

$$C = 0$$

On en déduit la fonction u

$$u(x) = f(x) - \lambda \int_0^x f(t)e^{\lambda(t-x)} dt$$

Inversement, une telle fonction est solution car sa primitive s'annulant en 0 vérifie l'équation $U' = \lambda U + f(x)$.

Exercice 58 : [énoncé]

Soit f solution.

En prenant $x = 0$ dans la relation, on observe que f est nécessairement paire.

En dérivant la relation deux fois par rapport à x on obtient

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)f(y)$$

En dérivant la relation deux fois par rapport à y on obtient

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$$

On en déduit

$$f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$$

Pour $y = 0$, on obtient l'équation $f''(x) = \lambda f(x)$ avec $\lambda = f''(0)$.

Si $\lambda > 0$ alors $f(x) = \text{ch}\sqrt{\lambda}x$.

Si $\lambda = 0$ alors $f(x) = 1$.

Si $\lambda < 0$ alors $f(x) = \cos\sqrt{-\lambda}x$

Inversement, on vérifie par le calcul qu'une fonction de la forme précédente est solution du problème posé.

Exercice 59 : [énoncé]

Sur $I =]-\infty; -1[$ ou $] -1; +\infty[$ l'espace des solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est un plan vectoriel. En recherchant ses solutions polynomiales on obtient les fonctions $y(t) = a(t^2 - 1) + b(t + 1)$. Les deux fonctions polynomiales $t \mapsto t^2 - 1$ et $t \mapsto t + 1$ sont solutions et indépendantes, elles constituent un système fondamental de solution de l'équation sur I . Reste à recoller celles-ci en -1 .

Si y est solution sur \mathbb{R} , elle est *a fortiori* solution sur $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$ donc il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t > -1, y(t) = a_1(t^2 - 1) + b_1(t + 1)$ et $\forall t < -1, y(t) = a_2(t^2 - 1) + b_2(t + 1)$.

Recherchons parmi les fonctions de la forme précédente celles pouvant être prolongée en une fonction deux fois dérivable en -1

Limite en -1 : $\lim_{t \rightarrow -1^+} y(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -1^-} y(t) = 0$. On peut prolonger y en -1 en posant $y(-1) = 0$.

$\forall t > -1, y'(t) = 2a_1t + b_1$ et $\forall t > -1, y'(t) = 2a_2t + b_2$.

Limite en -1 : $\lim_{t \rightarrow -1^+} y'(t) = -2a_1 + b_1$ et $\lim_{t \rightarrow -1^-} y'(t) = -2a_2 + b_2$. La fonction y est dérivable en -1 si, et seulement si, $-2a_1 + b_1 = -2a_2 + b_2$. Si tel est le cas :

$\forall t > -1, y''(t) = 2a_1$ et $\forall t < -1, y''(t) = 2a_2$.

Limite en -1 : $\lim_{t \rightarrow -1^+} y''(t) = 2a_1$ et $\lim_{t \rightarrow -1^-} y''(t) = 2a_2$. La fonction y est deux fois dérivable en -1 si, et seulement si, $2a_1 = 2a_2$.

Au final y peut être prolongée en une fonction deux fois dérivable si, et seulement si, $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

La fonction y est alors donnée par $y(t) = a_1(t^2 - 1) + b_1(t + 1)$ sur \mathbb{R} et elle bien solution de l'équation.

Finalement les solutions sur \mathbb{R} de l'équation sont les fonctions

$$y(t) = a(t^2 - 1) + b(t + 1) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Exercice 60 : [énoncé]

On remarque

$$(t + 1)y'' - (t + 2)y' + y = 0 \iff (t + 1)(y' - y)' - (y' - y) = 0$$

Les fonctions $y(t) = e^t$ et $y(t) = t + 2$ sont solutions sur \mathbb{R} et elles sont indépendantes.

Par suite, sur $I =]-\infty; -1[$ ou $] -1; +\infty[$, la solution générale est

$$y(t) = \lambda e^t + \mu(t + 2)$$

car on sait que l'espace des solutions est de dimension 2.

Après recollement en -1 , la solution générale sur \mathbb{R} est

$$y(t) = \lambda e^t + \mu(t + 2) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 61 : [énoncé]

a) $z: x \mapsto y(-x)$ est deux fois dérivable sur I' et vérifie bien l'équation.

b) Soient y une fonction deux fois dérivable définie sur \mathbb{R}_+^* et z définie par

$z(t) = y(\sqrt{t})$ de sorte que $y(x) = z(x^2)$. z est deux fois dérivable.

On a $y'(x) = 2xz'(x^2)$ et $y''(x) = 2z'(x^2) + 4x^2z''(x^2)$.

y est solution sur \mathbb{R}_+^* si, et seulement si,

$$4z'' - z = 0$$

Cela donne

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$$

c) Soit y une solution sur \mathbb{R} de l'équation proposée.

Puisque y est solution sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* on peut écrire :

$$\forall x > 0, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \lambda_2 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Puisque y est continue en 0

$$\lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2$$

y' est continue en 0 ne donne rien de plus

$$y''(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} \lambda_1 - \mu_1 \text{ et } y''(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\rightarrow} \lambda_2 - \mu_2$$

Donc $y''(0) = \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2$ d'où $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2$.

Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Inversement, une telle fonction est solution sur \mathbb{R} .

Exercice 62 : [énoncé]

a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Sur $] -R; R[$, la fonction $x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ avec

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \text{ et } y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)na_{n+1}x^{n-1}$$

On a alors

$$4xy'' + 2y' - y = \sum_{n=0}^{+\infty} (2(2n+1)(n+1)a_{n+1} - a_n)x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, la fonction y est solution de l'équation (E) si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

Ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{(2n)!} a_0$$

Inversement, la série entière donnée par $\sum \frac{a_0}{(2n)!} x^n$ est de rayon de convergence $+\infty$ et en vertu des calculs qui précèdent, sa somme est solution sur \mathbb{R} de l'équation (E).

- b) Considérons $I = \mathbb{R}_+^*$ ou \mathbb{R}_-^* et posons $x = \varepsilon t^2$ avec $\varepsilon = \pm 1$.
 Soit $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(\varepsilon t^2)$.
 La fonction z est deux fois dérivable et

$$z(t) = y(\varepsilon t^2), z'(t) = 2\varepsilon t y'(\varepsilon t^2) \text{ et } z''(t) = 4t^2 y''(\varepsilon t^2) + 2\varepsilon y'(\varepsilon t^2)$$

de sorte que

$$z''(t) - z(t) = 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x)$$

Ainsi y est solution de (E) sur I si, et seulement si, z est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $z'' - z = 0$. La solution générale de cette dernière est $z(t) = \lambda \operatorname{ch} t + \mu \operatorname{sh} t$ et la solution générale de (E) sur I est donc

$$y(x) = \lambda \operatorname{ch}(\sqrt{|x|}) + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|x|})$$

- c) Soit y une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* . On peut écrire

$$\forall x > 0, y(x) = \lambda \operatorname{ch}(\sqrt{|x|}) + \mu \operatorname{sh}(\sqrt{|x|}) \text{ et } \forall x < 0, y(x) = \lambda' \operatorname{ch}(\sqrt{|x|}) + \mu' \operatorname{sh}(\sqrt{|x|})$$

Le raccord par continuité exige $\lambda = \lambda'$.

La dérivabilité du raccord exige $\mu = \mu' = 0$.

La fonction ainsi obtenue correspond alors au développement en série entière initiale qu'on sait être solution sur \mathbb{R} .

Exercice 63 : [énoncé]

Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z = y' - y$.

z est dérivable et $z' = y'' - y'$.

y est solution de E si, et seulement si, z est solution de $F: xz' - z = 1$.

F est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Solution générale de F sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* : $z(x) = Cx - 1$.

Après recollement, solution générale de F sur \mathbb{R} : $z(x) = Cx - 1$.

Reste à résoudre $G: y' - y = Cx - 1$.

Solution homogène : $y_0(x) = De^x$.

Solution particulière $y_1(x) = -C(x + 1) + 1$.

Solution générale de E : $y(x) = -C(x + 1) + De^x + 1$ avec $C, D \in \mathbb{R}$.

Exercice 64 : [énoncé]

Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z = y'$, z est dérivable.

y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, z solution de

$$(1 + x^2)z' + 2xz = 0$$

On obtient

$$z(x) = \frac{C}{1 + x^2}$$

puis

$$y(x) = C \arctan x + D$$

Exercice 65 : [énoncé]

Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$z(x) = (1 + e^x)y(x).$$

z est deux fois dérivable et $z'(x) = (1 + e^x)y'(x) + e^xy(x)$,

$$z''(x) = (1 + e^x)y''(x) + 2e^xy'(x) + e^xy(x)$$

y est solution de E si, et seulement si, z est solution de $F: z'' + z = xe^x$.

F est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants de

solution homogène $z_0(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$ et de solution particulière :

$$z_1(x) = \frac{x-1}{2} e^x.$$

Solution générale de F : $z(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{x-1}{2} e^x$.

La solution générale de E est donc : $y(x) = \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{x-1}{2} e^x}{1 + e^x}$.

Exercice 66 : [énoncé]

Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$z(x) = \frac{y(x)}{1 + e^x}$$

La fonction z est deux fois dérivable.

On a $y(x) = (1 + e^x)z(x)$, $y'(x) = (1 + e^x)z'(x) + e^xz(x)$,

$$y''(x) = (1 + e^x)z''(x) + 2e^xz'(x) + e^xz(x).$$

y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si, $z'' - z = 0$.

On obtient pour solution générale de l'équation $z'' - z = 0$

$$z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

et on en déduit la solution générale de l'équation étudiée

$$y(x) = (C_1 e^x + C_2 e^{-x})(1 + e^x)$$

Exercice 67 : [énoncé]

Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Posons $z: x \mapsto e^{x^2} y(x)$, z est deux fois dérivable.

y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si, z solution de $z'' + z = 0$.

On obtient

$$z(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

et on en déduit

$$y(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) e^{-x^2}$$

Exercice 68 : [énoncé]

Soit $y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

Posons $z: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(x) = x^2 y(x)$. z est deux fois dérivable.

$z'(x) = x^2 y'(x) + 2xy'(x)$, $z''(x) = x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x)$.

On observe $x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0 \iff z'' - z = 0$

La solution générale de l'équation $z'' = z$ est $z(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$.

La solution générale de l'équation initiale est donc $y(x) = \frac{\lambda e^x + \mu e^{-x}}{x^2}$.

Exercice 69 : [énoncé]

Soit $y:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $z:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$z(x) = x^{-\alpha} y(x)$$

La fonction z est deux fois dérivable et

$$y'(x) = x^\alpha z'(x) + \alpha x^{\alpha-1} z(x), y''(x) = x^\alpha z''(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} z'(x) + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} z(x)$$

donc

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = x^{\alpha+1} z''(x) + 2(\alpha+1)x^\alpha z'(x) + (\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-1} - x^{\alpha+1}) z(x)$$

Pour $\alpha = -1$, on obtient

$$xy''(x) + 2y'(x) - xy(x) = z''(x) - z(x)$$

et donc y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$z(x) = \lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x$$

ce qui donne la solution générale

$$y(x) = \frac{\lambda \operatorname{ch} x + \mu \operatorname{sh} x}{x}$$

Exercice 70 : [énoncé]

Soit y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Posons z la fonction définie par $z = y + y'$.

y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de $(1 + e^x)z' - e^x z = 0$ i.e. $z(x) = C(e^x + 1)$. On en déduit

$$y(x) = \alpha e^{-x} + \beta(e^x + 2).$$

Exercice 71 : [énoncé]

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $]0; +\infty[$ et z la fonction définie par $z(x) = xy'(x) + y(x)$. z est dérivable. y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de

$$x.z' - 2z = -\frac{3}{x}$$

Après résolution de cette équation différentielle :

$$z(x) = Cx^2 + \frac{1}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Par suite

$$xy'(x) + y(x) = Cx^2 + 1/x$$

Après résolution de cette équation différentielle

$$y(x) = \frac{C'}{x} + \frac{1}{3}Cx^2 + \frac{\ln x}{x} \text{ avec } C, C' \in \mathbb{R}$$

Inversement les fonctions proposées sont bien solutions.

Exercice 72 : [énoncé]

a) L'équation homogène associée est

$$(t^2 + 1)y'' - 2y = 0$$

La fonction $\varphi(t) = t^2 + 1$ en est solution sur \mathbb{R} .

b) Procédons au changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$.

On obtient

$$(t^2 + 1)z''(t) + 4tz'(t) = 0$$

qui donne

$$z'(t) = \frac{\lambda}{(t^2 + 1)^2}$$

Sachant

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2} \arctan t + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1}$$

on obtient

$$z(t) = \frac{\lambda}{2} \left(\arctan t + \frac{t}{t^2+1} \right) + \mu$$

ce qui donne la solution homogène

$$y(t) = \frac{\lambda}{2} ((t^2+1) \arctan t + t) + \mu(t^2+1)$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

c) $y(t) = -t/2$ est solution particulière donc la solution générale est

$$y(t) = \lambda(t^2+1) + \mu((t^2+1) \arctan t + t) - \frac{1}{2}t$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 73 : [énoncé]

a) Si y est un polynôme unitaire de degré n solution de l'équation homogène, le coefficient de t^{n+2} dans le premier membre de l'équation est

$$n(n-1) - 2n + 2 = n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1)$$

et donc nécessairement $n \leq 2$.

Pour $\varphi(t) = at^2 + bt + c$, le premier membre de l'équation devient :

$$2a(1+t^2)^2 - 2t(2at+b)(1+t^2) + 2(t^2-1)(at^2+bt+c) = (2c-2a)t^2 - 4bt + (2a-2c)$$

d'où $a = c$ et $b = 0$

Finalement $\varphi(t) = t^2 + 1$ est solution particulière.

b) Par le changement de fonction inconnue $y(t) = \varphi(t)z(t)$, on parvient à l'équation

$$(1+t^2)^3 z''(t) + 2t(1+t^2)^2 z'(t) = (1+t^2)$$

Après résolution de cette équation d'ordre 1 en l'inconnue z' , on obtient

$$z'(t) = \frac{\lambda + \arctan t}{(1+t^2)}$$

puis

$$z(t) = \mu + \lambda \arctan t + \frac{1}{2} (\arctan t)^2$$

Finalement la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(t) = \lambda(1+t^2) \arctan t + \mu(1+t^2) + \frac{1}{2}(1+t^2) (\arctan t)^2$$

Exercice 74 : [énoncé]

a) $\varphi(t) = t$ est évidemment solution particulière.

b) On pose le $y(t) = tz(t)$ et on parvient à l'équation

$$t^4 z'' + t^2(2t+1)z' = 0$$

On résout cette équation en la fonction inconnue z' puis on intègre pour obtenir

$$z(t) = \lambda e^{1/t} + \mu$$

Finalement la solution générale est

$$y(t) = \lambda t e^{1/t} + \mu t$$

Exercice 75 : [énoncé]

a) $\varphi(t) = t$ est solution remarquable.

b) En posant $y(t) = tz(t)$ et on parvient à l'équation

$$t^3 z'' + 3t^2 z' = 1$$

On résout cette équation en la fonction inconnue z'

$$z'(t) = \frac{\lambda}{t^3} + \frac{1}{t^2} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

et l'on obtient

$$z(t) = \frac{\lambda'}{t^2} + \mu - \frac{1}{t} \text{ avec } \lambda', \mu \in \mathbb{R}$$

Finalement, la solution générale est

$$y(t) = \frac{\lambda}{t} + \mu t - 1 \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 76 : [\[énoncé\]](#)

- a) Soit y la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R supposé > 0 .

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2(a_{n+1} - a_n)x^n$$

On en déduit $y(x) = \frac{1}{1-x}$ solution de l'équation étudiée.

- b) On pose $y(x) = \frac{z(x)}{1-x}$ avec z deux fois dérivable et l'on obtient

$$xz'' + z' = 0$$

On résout cette équation en la fonction inconnue z'

$$z'(x) = \frac{\lambda}{x}$$

puis on intègre

$$z(x) = \lambda \ln x + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Finalement, la solution générale sur $]0; 1[$ est

$$y(x) = \frac{\lambda \ln(x) + \mu}{1-x}$$

Exercice 77 : [\[énoncé\]](#)

- a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme y_1 sur $] -R; R[$.
Pour tout $x \in] -R; R[$, on a

$$xy''(x) + 3y'(x) - 4x^3y(x) = 3a_1 + 8a_2x + 21a_3x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} ((n+1)(n+3)a_{n+1} - 4a_{n-3})x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on peut affirmer que y est solution de E sur $] -R; R[$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ \forall n \geq 3, a_{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+3)} a_{n-3} \end{cases}$$

Posons $a_0 = 1$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a_{4p} = \frac{1}{2^p(2p+1)} a_{4(p-1)}$, les autres a_n nuls.
Ainsi

$$a_{4p} = \frac{1}{(2p+1)!}, a_{4p+1} = a_{4p+2} = a_{4p+3} = 0$$

La série entière correspondante est de rayon de convergence $R = +\infty$ et sa somme

$$\varphi: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!}$$

est solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle E en vertu des calculs qui précèdent.

Pour $x \neq 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{\text{sh}(x^2)}{x^2}$$

- b) On pose $y(x) = \varphi(x)z(x)$ et l'équation (E) devient

$$z''(x) = \left(\frac{1}{x} - 4x \frac{\text{ch}(x^2)}{\text{sh}(x^2)} \right) z'(x)$$

Après résolution en la fonction inconnue z' on obtient

$$z'(x) = \frac{\lambda x}{\text{sh}^2(x^2)}$$

puis

$$z(x) = -\frac{\lambda \text{ch}(x^2)}{2 \text{sh}(x^2)} + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

La solution générale de l'équation est alors

$$y(x) = \frac{\lambda \text{sh}(x^2) + \mu \text{ch}(x^2)}{x^2} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 78 : [\[énoncé\]](#)

- a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme y sur $] -R; R[$.
Pour tout $x \in] -R; R[$, on a

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)x^n$$

La fonction y est donc solution de l'équation différentielle étudiée si, et seulement si,

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n$$

Inversement, en considérant la fonction $\varphi: x \mapsto \frac{x}{1-x}$, on obtient une fonction développable en série entière avec un rayon de convergence $R = 1$ et les calculs qui précèdent assure que y est solution sur $] -1; 1[$ de l'équation étudiée.

b) On pose

$$y(x) = \frac{xz(x)}{1-x}$$

Après calculs, la fonction y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$xz''(x) + z'(x) = 0$$

Après résolution de cette équation en l'inconnue z' , on obtient

$$z'(x) = \frac{\lambda}{x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

puis en intégrant

$$z(x) = \lambda \ln x + \mu \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Finalement, la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(x) = \frac{(\lambda \ln x + \mu)x}{1-x}$$

Exercice 79 : [énoncé]

Soit $y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.

Posons $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(e^t)$. z est deux fois dérivable.

$y(x) = z(\ln x)$, $y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x)$ et $y''(x) = \frac{1}{x^2}z''(\ln x) - \frac{1}{x^2}z'(\ln x)$.

Par suite $x^2y'' + xy' + y = 0 \iff z'' + z = 0$.

Solution générale : $y(x) = \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x)$.

Exercice 80 : [énoncé]

a) Les solutions sur \mathbb{R}_+^* sont :

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x + \frac{x^2}{3}$$

b) Les solutions sur \mathbb{R}_+^* sont :

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x^2 - \frac{x}{2}$$

Exercice 81 : [énoncé]

$x = \cos t, t = \arccos x, x \in] -1; 1[, t \in]0; \pi[$.

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $] -1; 1[$.

Posons z la fonction définie sur $]0; \pi[$ par $z(t) = y(x) = y(\cos t)$.

z est deux fois dérivable.

Après calculs :

y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation différentielle $z'' + 4z = t$ i.e.

$$z(t) = \lambda \cos 2t + \mu \sin 2t + \frac{1}{4}t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On en déduit

$$y(x) = \lambda(2x^2 - 1) + 2\mu x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} \arccos x \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 82 : [énoncé]

Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur \mathbb{R} .

Posons z la fonction définie sur $] -\pi/2; \pi/2[$ par $z(t) = y(x) = y(\tan t)$.

z est deux fois dérivable.

Après calculs :

y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation $z'' - 2z' + z = 0$ i.e. $z(t) = (\lambda t + \mu)e^t$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On en déduit $y(x) = (\lambda \arctan x + \mu)e^{\arctan x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 83 : [énoncé]

Soit y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $z: I =] -\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(\tan t)$.

z est deux fois dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = z(\arctan x)$$

$$y'(x) = \frac{z'(\arctan x)}{1+x^2} \text{ et } y''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}z'(\arctan x) + \frac{1}{(1+x^2)^2}z''(\arctan x)$$

y est solution si, et seulement si, z est solution sur I de l'équation $z'' + z = 0$.

On obtient

$$z(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t$$

et

$$y(x) = \frac{\lambda + \mu x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 84 : [\[énoncé\]](#)

Soient y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $z: I =]-\pi/2; \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(\tan x)$.

z est deux fois dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = z(\arctan t)$.

$$y'(t) = \frac{z'(\arctan t)}{1+t^2} \text{ et } y''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} z'(\arctan t) + \frac{1}{(1+t^2)^2} z''(\arctan t).$$

y est solution si, et seulement si,

$$z''(\arctan t) + z(\arctan t) = t$$

soit $z''(x) + z(x) = \tan x$ sur I .

$$z'' + z = 0 \text{ donc } z = \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

Méthode de la variation des constantes : $\lambda'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ et $\mu'(x) = \sin x$.

$$\int -\frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \underset{u=\sin x}{=} \int \frac{u^2}{u^2-1} du = u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} + C$$

Prenons $\lambda(x) = \sin x + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ et $\mu(x) = -\cos x$.

On obtient : $z(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cos x$ solution particulière.

Finalement

$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \ln \frac{\sqrt{1+t^2}-t}{\sqrt{1+t^2}+t}$$

Exercice 85 : [\[énoncé\]](#)

Soient $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un \mathcal{C}^2 difféomorphisme.

Posons $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie de sorte que $y(u) = x(t)$ i.e. $y(u) = x(\varphi^{-1}(u))$.

La fonction y est deux fois dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}, x(t) = y(\varphi(t))$.

On a alors $x'(t) = \varphi'(t)y'(\varphi(t))$ et $x''(t) = (\varphi'(t))^2 y''(\varphi(t)) + \varphi''(t)y'(\varphi(t))$.

Par suite

$$(1+t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t) = (1+t^2)\varphi'(t)^2 y''(\varphi(t)) + ((1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t)) y'(\varphi(t)) + a^2y(\varphi(t))$$

Pour $\varphi(t) = \operatorname{argsht}, \varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $(1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t) = 0$ de sorte que

$$(1+t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t) = 0 \iff y''(\varphi(t)) + a^2y(\varphi(t)) = 0$$

Cela nous amène à résoudre l'équation

$$y''(u) + a^2y(u) = 0$$

Si $a \neq 0$, la solution générale de $y''(u) + a^2y(u) = 0$ est

$y(u) = \lambda \cos(au) + \mu \sin(au)$ et la solution générale de $(1+t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$ est

$$x(t) = \lambda \cos(a \operatorname{argsht}) + \mu \sin(a \operatorname{argsht}) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Si $a = 0$, on parvient à

$$x(t) = \lambda + \mu \operatorname{argsht} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 86 : [\[énoncé\]](#)

$P = (x+1)X - 1$ convient.

$$(E) \iff (x+1)z' - z = (3x+2)e^{3x}$$

Après résolution avec recollement la solution générale de cette dernière équation est $z(x) = \lambda(x+1) + e^{3x}$.

$$(E) \iff y' - 3y = \lambda(x+1) + e^{3x}$$

La solution générale est

$$y(x) = \lambda'(3x+4) + \mu e^{3x} + x e^{3x}$$