

MINES d'ALBI, ALES, DOUAI, NANTES 2010

CORRIGE

PREMIER PROBLEME :

PARTIE I :

1) L'ensemble de définition D de f est $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$.

2) On a au voisinage de 0 : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On en déduit : $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. De ce fait on a $D' =] -1, +\infty[$.

3) Le développement limité précédent prouve que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Il est clair que f est de classe C^1 sur D en tant que quotient de deux fonctions de classe C^1 avec le dénominateur non nul sur D.

De plus $\forall x \in D$ $f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2(1+x)} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2(1+x)} \rightarrow -\frac{1}{2}$ donc on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$ donc f' est continue en 0 ce qui assure la classe C^1 de f sur D'.

4) $\forall x \in D$, $f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$ qui est du signe de $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$. On a alors $k'(x) = -\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ d'où :

x	-1	0	$+\infty$
$k'(x)$	+	-	
$k(x)$	-1	0	$-\infty$

donc $\forall x \in] -1, +\infty[$ $k(x) \leq 0$ donc f est décroissante

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

PARTIE II :

6) L'intégrale précédente est bien définie car la fonction f est continue sur $[0,1]$.

7) La somme proposée est géométrique de raison $-t$, et puisque $t \in [0,1]$, la raison n'est pas égale à 1, donc la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique assure le résultat.

8) On intègre la relation précédente sur le segment $[0,1]$ sur lequel elle est valide :

$$P_n(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^n t^n}{1+t} \right) dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

9) $|R_n(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt$ d'après l'inégalité de la moyenne, puisque $x \geq 0$.

donc $|R_n(x)| \leq \int_0^x t^n dt$ car $\forall t \in [0, x]$ $1+t \geq 1$.

donc $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$

10) Il est clair que le polynôme Q_n est dérivable, et que $P_n(x)$ est égal à $xQ'_n(x)$

11) L'application $G : x \mapsto Q_n(x) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ est dérivable sur $[0,1]$ et on a $G'(x) = g_n(x)$ d'après 10) et d'après 9)

$$|g_n(x)| \leq \frac{x^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

d'où : $|Q_n(1) - Q_n(0) - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt| = |G(1) - G(0)| = |\int_0^1 g_n(x) dx| \leq \int_0^1 |g_n(x)| dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} dx \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ d'où le résultat. On en déduit par majoration $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(1) = L$.

12) Pour obtenir la précision voulue, il suffit d'après la question précédente d'avoir : $\frac{1}{(n+1)^2} \leq 10^{-4}$ soit $n+1 \geq 10^2$ c'est-à-dire $n \geq 99$.

PARTIE III :

13) f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions usuelles de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ puisque le dénominateur ne s'y annule pas.

14) On a déjà obtenu : $f'(x) = \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$, donc :

$$f''(x) = -\frac{1+2x}{x^2(1+x)^2} - \frac{\frac{x^2}{1+x} - 2x \ln(1+x)}{x^4} = \frac{-2-3x}{x^2(1+x)^2} + \frac{2 \ln(1+x)}{x^3}$$

15) Les calculs de la question 14 montrent que le résultat est vrai pour $n=1$ et $n=2$ en posant : $T_1(x) = 1$, $a_1 = -1$, $T_2(x) = -2 - 3x$ et $a_2 = 2$.

Supposons que le résultat soit vrai pour un entier n non nul et montrons-le au rang $n+1$: On a $f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} +$

$a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$ donc en dérivant :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{T'_n(x)(1+x)^n x^n - T_n(x)(n x^{n-1}(1+x)^n + n(1+x)^{n-1} x^n)}{(1+x)^{2n} x^{2n}}$$

$$+ a_n \frac{\frac{x^{n+1}}{1+x} - (n+1)x^n \ln(1+x)}{x^{2n+2}}$$

$$= \frac{T'_n(x)(1+x)x - T_n(x)(2nx+n) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1} x^{n+1}} - \frac{a_n(n+1) \ln(1+x)}{x^{n+2}}$$

d'où le résultat en posant $T_{n+1} = T'_n(x)(1+x)x - T_n(x)(2nx+n) + a_n(1+x)^n$

et $a_{n+1} = -a_n(n+1)$.

16) On raisonne par récurrence :

Pour $n=1$ et $n=2$ les calculs de la question 16 prouvent que les coefficients sont entiers pour T_1 et T_2 .

Supposons que pour un entier n non nul les coefficients de T_n soient tous entiers.

Les coefficients de T'_n sont alors entiers eux aussi et le lien qui relie T_{n+1} à T_n et T'_n prouve alors que les coefficients de T_{n+1} sont entiers.

17) Utilisons la formule de Leibniz avec les fonctions $g(x) = \ln(1+x)$ et $h(x) = \frac{1}{x}$

On obtient : $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$

Or on a : $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ puis $g^{(k)}(x) = (-1)^{(k-1)} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ et $h^{(k)} = (-1)^{(k)} \frac{k!}{(x)^{k+1}}$

donc $f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{(k-1)} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} (-1)^{(n-k)} \frac{(n-k)!}{(x)^{n-k+1}} + \frac{(-1)^n n! \ln(1+x)}{x^{n+1}}$

donc $T_n(x) = (-1)^{(n-1)} n! \sum_{k=1}^n \frac{(1+x)^{n-k} x^{k-1}}{k}$.

On vérifie ce résultat pour $n=2$: la formule donne : $T_n(x) = -2(1+x) - x = -2 - 3x$ ce qui correspond bien à la valeur de T_2 obtenue.

FIN

