Chap 4

Espaces vectoriels normés
Partie 2
Résumé

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F deux evn.

Pour alléger, $\| \ \|$ désignera la norme dans E et dans F

1) Limite et Continuité en un point

Déf Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$. Soient $a \in \bar{A}$ et $\ell \in F$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma > 0, \forall x \in A, \|x-a\| \leq \gamma \Rightarrow \|f(x)-\ell\| \leq \varepsilon\right)$$

Déf Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$. Soit $a \in A$

1) f est dite continue en a si et ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

2) f est dite continue sur A si et ssi elle est continue en tout point de A.

Prop (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$. Soient $a \in \bar{A}$ et $\ell \in F$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

2) (Pour toute suite $(x_n)_n$ à valeurs dans A. Si $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ alors $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$)

Pr. ELAMIRI

Corollaire (Caractérisation séquentielle de la Continuité)

Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$. Soit $a \in A$.

Les propositions suivantes sont équivalentes ;

1) f est continue en a.

2) $\left(\begin{array}{l}\text{Pour toute suite } (x_n)_n \text{ à valeurs dans } A. \\ \text{Si } \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \text{ alors } \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)\end{array}\right)$

NB 1

Pour montrer que f n'a pas de limite en a, il suffit de trouver deux suites (x_n) et (y_n) tendant vers a, alors que leurs suites images $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ tendent vers deux limites différentes.

NB 2

Pour montrer que f n'est pas continue en a, il suffit de trouver une suite $(x_n)_n$ tendant vers a alors que sa suite image $(f(x_n))_n$ ne tend pas vers $f(a)$.

2) Continuité Uniforme

Déf Soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$, où $A \subset E$.

f est dite uniformément continue sur A si et ssi :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in A,\ \|x-y\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leqslant \varepsilon}$$

Prop

(f est uniformément continue sur A) $\Longrightarrow$ (f est continue sur A)

Déf (Fonction lipschitzienne)

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$.

f est dite lipschitzienne sur A si et ssi :

$$\boxed{\exists k \geq 0, \forall x, y \in A, \ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|}$$

Prop

(f est lipschitzienne sur A) $\Longrightarrow$ (f est uniformément continue sur A)

Prop Soit $A \subset E$.

L'application $\begin{vmatrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto d(x, A) \end{vmatrix}$ est lipschitzienne sur E.

Précisément : $\forall x, y \in E, \ |d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$

3) Continuité et densité

Prop Soient f et $g \in \mathcal{F}(E, F)$; où E et F deux evn.

Soit D une partie dense de E.

Supposons que f et g continues sur E. On a :

1) ($f = g$ sur E) $\Longleftrightarrow$ ($f = g$ sur D)

2) ($f = 0$ sur E) $\Longleftrightarrow$ ($f = 0$ sur D)

4) Extensions de la notion de limite

E et F deux evn.

Déf

$f : A \subset E \to F$ et $l \in F$.

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in A, \|x\| \geq B \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon)$$

Déf

$f : A \subset \mathbb{R} \to F$ et $l \in F$.

1) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in A, x \geq B \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon)$$

2) $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists B < 0, \forall x \in A, x \leq B \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon)$$

Déf

$f : A \subset E \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$.

1) $$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff (\forall B > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq B)$$

2) $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff (\forall B < 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq B)$$

5) Fonction à valeurs dans un produit cartésien d'evn

Ici:
- E evn et $A \subset E$.
- $E_1, \ldots, E_s$ des evn.
- $f : A \subset E \longrightarrow E_1 \times \cdots \times E_s$; $x \longmapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x))$

Vocabulaire

$f_1, \ldots, f_s$ sont les fonctions composantes de f.

Prop

Soient $a \in \overline{A}$ et $l = (l_1, \ldots, l_s) \in E_1 \times \cdots \times E_s$. On a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \left(\forall 1 \leq i \leq s, \lim_{x \to a} f_i(x) = l_i\right)$$

Corollaire

Soit $a \in A$. On a

1) f Continue en $a \iff$ (Toutes ses fonctions composantes sont continues en a)

2) f Continue sur $A \iff$ (Toutes ses fonctions composantes sont continues sur A)

6) Opérations sur les limites et sur les fonctions continues

Prop

f et $g : A \subset E \longrightarrow F$, $a \in \bar{A}$, $(l, L) \in F^2$. On a :

1) $$\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \end{pmatrix} \Longrightarrow \left(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \lim_{x \to a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha l + \beta L \right)$$

2) $$\lim_{x \to a} f(x) = l \Longrightarrow \lim_{x \to a} \|f(x)\| = \|l\|$$

Corollaire

Soient $f, g : A \subset E \longrightarrow F$ et $a \in A$.

1) Si (f et g sont continues en a) alors ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha f + \beta g)$ est continue en a)

2) Si (f et g sont continues sur A) alors ($\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha f + \beta g)$ est continue sur A)

Prop

Soient $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $w : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$.

Soient $a \in \bar{A}$, $l \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a :

1) $$\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to a} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to a} w(x) = \alpha \end{pmatrix} \Longrightarrow \lim_{x \to a} w(x) f(x) = \alpha l$$

2) Si f et w sont continues sur A alors leur produit (wf) l'est aussi.

Corollaire

E un evn de dimension finie et B une base de E.

Toute fonction définie sur E, polynomiale en les coordonnées dans la base B est continue sur E.

Prop (Composée)

E, F et G trois evn.

Soient $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $g : B \subset F \longrightarrow G$, avec $f(A) \subset B$.

1) Soient $a \in \bar{A}$, $b \in \bar{B}$ et $l \in G$.

Si $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} g(x) = l \end{pmatrix}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = l$

2) Soit $a \in A$.

Si $\begin{pmatrix} f \text{ continue en } a \\ g \text{ continue en } f(a) \end{pmatrix}$ alors ($g \circ f$ est continue en a)

3) Si $\begin{pmatrix} f \text{ continue sur } A \\ g \text{ continue sur } B \end{pmatrix}$ alors ($g \circ f$ est continue sur A)

Corollaire

Soient f et $g : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$

1) Si $\begin{pmatrix} f \text{ continue sur } A \\ f \text{ ne s'annule pas sur } A \end{pmatrix}$ alors $\left(\frac{1}{f} \text{ est continue sur } A\right)$

2) Si $\begin{pmatrix} f \text{ et } g \text{ continues sur } A \\ f \text{ ne s'annule pas sur } A \end{pmatrix}$ alors $\left(\frac{g}{f} \text{ est continue sur } A\right)$

7) Fonction à but dans un evn de dimension finie

$f : A \subset E \longrightarrow F$, où E et F deux evn.
F est de dimension finie $s \geq 1$ et $B = (e_1, \dots, e_s)$ une base de F.
f s'écrit sous la forme : $f = f_1 e_1 + \dots + f_s e_s = \sum_{i=1}^{s} f_i e_i$.
Pour chaque $i \in [\![1, s]\!]$, $f_i : A \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$.

Vocabulaire

$f_1, \dots, f_s$ s'appellent les fonctions composantes de f dans la base B.

Prop

Soient $a \in \bar{A}$ et $l = \sum_{i=1}^{s} l_i e_i \in F$. On a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \left(\forall 1 \leq i \leq s, \lim_{x \to a} f_i(x) = l_i \right)$$

Corollaire

1) Soit $a \in A$.

$$\left(f \text{ continue en } a \right) \iff \left(\begin{array}{l} \text{Toutes ses fonctions composantes dans la base } B \text{ sont} \\ \text{continues en } a \end{array} \right)$$

2) $$\left(f \text{ continue sur } A \right) \iff \left(\begin{array}{l} \text{Toutes ses fonctions composantes dans la base } B \text{ sont} \\ \text{continues sur } A \end{array} \right)$$

8) Image réciproque d'un ouvert et d'un fermé par une application continue

Prop

Soient E et F deux evn et $f : E \longrightarrow F$ continue sur E.

1) L'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E
2) L'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E

Autrement dit

1) Si $\left(\begin{array}{l} \theta \text{ ouvert de } F \\ f \text{ continue sur } E \end{array} \right)$ alors $\left(f^{-1}(\theta) \text{ est un ouvert de } E \right)$

2) Si $\begin{pmatrix} H \text{ fermé de } F \\ f \text{ continue sur } E \end{pmatrix}$ alors ($f^{-1}(H)$ est un fermé de E)

9) Applications linéaires continues

Prop

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F deux evn.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

!!

1) f est continue sur E
2) f est continue en 0
3) $\exists C > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq C\|x\|$

Corollaire

Si $\begin{pmatrix} f \in \mathcal{L}(E,F) \\ E \text{ de dimension finie} \end{pmatrix}$ alors (f est continue sur E)

10) Continuité des applications multilinéaires

Prop

Soient E, F et G trois evn.

Soit $f : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue sur $E \times F$
2) $\exists C > 0, \forall (x,y) \in E \times F, \|f(x,y)\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$

En général, on a :

Prop

Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des evn.

Soit $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application n_linéaire.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue sur $E_1 \times \dots \times E_n$
2) $\exists C > 0, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, \|f(x_1, \dots, x_n)\| \leq C\|x_1\| \dots \|x_n\|$

Prop

Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des evn.

Si
1) $f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ une application n_linéaire
2) $E_1, \dots, E_n$ sont de dimensions finies

alors f est continue sur $E_1 \times \dots \times E_n$

Cas particulier fréquent

Si E et F sont deux evn de dimensions finies alors toute application bilinéaire sur $E \times F$ est continue.

II) Compacité et Continuité

Prop (Image continue d'un compact)

Soit $f : E \to F$ où E et F deux evn.

Si $\begin{cases} K \text{ compact de } E \\ f \text{ continue sur } K \end{cases}$ alors $\big(f(K) \text{ est un compact de } F\big)$

Prop (Cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$)

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ où E evn.

Si $\begin{pmatrix} K \text{ Compact de } E \\ f \text{ continue sur } K \end{pmatrix}$ alors (f est bornée sur K et atteint ses bornes)

Prop (Théorème de Heine)

Soit $f : E \to F$ où E et F deux evn.

Soit K un compact de E. On a :

$$(f \text{ Continue sur } K) \iff (f \text{ Uniformément Continue sur } K)$$

12) Les Compacts en dimension finie

Prop

1) Dans $\mathbb{R}$, les segments sont des compacts.

2) Dans $\mathbb{C}$, les disques fermés sont des compacts.

Prop

Soit E un evn de dimension finie.

Soit $K \subset E$. On a :

$$\boxed{K \text{ Compact} \iff K \text{ est fermé borné}}$$

Prop

Soit E un evn de dimension finie.

1) Toute suite bornée admet au moins une sous-suite convergente.

2) Autrement dit :

Toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

Prop

Soit E un evn de dimension finie.

Une suite bornée est convergente si et ssi elle possède une unique valeur d'adhérence.

13) Fermeture d'un sev de dimension finie

Prop

Soit E un evn de dimension quelconque.

Tout sev de dimension finie de E est fermé.

14) Parties connexes par arcs

A sera une partie non vide de l'evn E.

Soient x et $y \in A$.

$\boxed{x \text{ et } y \text{ sont joignables par un arc inscrit dans } A}$ si et ssi

Il existe un segment $[\alpha,\beta]$ de $\mathbb{R}$ et une application $\gamma : [\alpha,\beta] \to E$ vérifiant :

1) $\gamma(\alpha) = x$ et $\gamma(\beta) = y$
2) γ continue sur $[\alpha,\beta]$
3) $\gamma([\alpha,\beta]) \subset A$

Prop

Si $\left(\begin{array}{l} x \text{ et } y \text{ sont joignables par un arc inscrit dans } A \\ y \text{ et } z \text{ sont joignables par un arc inscrit dans } A \end{array}\right)$

Alors (x et z sont joignables par un arc inscrit dans A)

Déf

La partie A est dite connexe par arcs si et ssi pour tout $x, y \in A$, x et y sont joignables par un arc inscrit dans A.

Prop

A convexe $\Longrightarrow$ A connexe par arcs

Prop

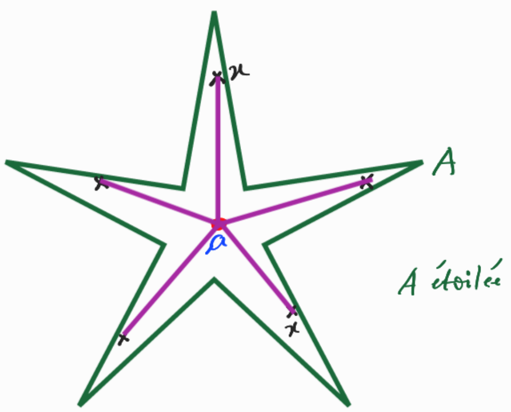
Dans l'ev $\mathbb{R}$, on a :

(A convexe) $\Longleftrightarrow$ (A intervalle) $\Longleftrightarrow$ (A connexe par arcs)

Déf (Partie étoilée)

A est dite partie étoilée de E, si et ssi :

$\exists a \in A, \forall x \in A, [a, x] \subset A$



Prop

A étoilé $\Longrightarrow$ A connexe par arcs

Prop (Image continue d'un connexe par arcs)

Si $\left(\begin{array}{l} A \text{ connexe par arcs} \\ f \text{ continue sur } A \end{array}\right)$ Alors $\left(f(A) \text{ est connexe par arcs}\right)$

Fin