Corrigé X 2014 filière MP sujet B

Première partie

Pour simplifier, on posera dans cette partie $M = M_{p,q,r}$ et $N = M_{p',q',r'}$. On utilisera les calculs suivants :
$MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pq' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(I+M)(I+N) = \begin{pmatrix} 1 & p+p' & r+r'+pq' \\ 0 & 1 & q+q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Comme $M^3 = 0$, on a $\exp M_{p,q,r} = I_3 + M_{p,q,r} + M_{p,q,r}^2 = \begin{pmatrix} 1 & p & \frac{pq}{2}+r \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) $M_{p,q,r} * M_{p',q',r'} = \begin{pmatrix} 0 & p+p' & \frac{pq'-p'q}{2}+r+r' \\ 0 & 0 & q+q' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L$, donc la loi $*$ est interne dans L.
   L'élément neutre est $0 = M_{0,0,0}$.
   $(M*N)*P = \begin{pmatrix} 0 & p+p'+p'' & x \\ 0 & 0 & q+q'+q'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $x = r+r'+r''+\frac{1}{2}(pq'+pq''+p'q''-qp'-qp''-q'p'')$. Par symétrie dans l'expression de x, on constate que $(M*N)*P = M*(N*P)$, donc $*$ est associative.
   Enfin, $M_{p,q,r} * M_{-p,-q,-r} = M_{-p,-q,-r} * M_{p,q,r} = 0$, donc $(L,*)$ est un groupe.
   (b) $M_{p,q,r}$ commute avec tout élément $M_{p',q',r'}$ de L si et seulement si $pq'-p'q = p'q-pq'$ pour tout (p',q',r'), c'est-à-dire $pq' = p'q$, donc $p = q = 0$. Les éléments solutions décrivent la droite vectorielle $\mathbb{R}\,M_{0,0,1}$. En particulier, $(L,*)$ n'est pas abélien.

3. $\exp M \times \exp N = \begin{pmatrix} 1 & p+p' & y \\ 0 & 1 & q+q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $y = \frac{1}{2}(pq+p'q')+pq'+r+r'$.
   En utilisant 2a et 1, $\exp(M*N) = \begin{pmatrix} 1 & p+p' & z \\ 0 & 1 & q+q' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $z = \frac{1}{2}(p+p')(q+q')+r+r'+\frac{1}{2}(pq'-qp') = y$, donc $\exp M \times \exp N = \exp(M*N)$.

4. $[M,N] = (pq'-qp')M_{0,0,1}$, dont le carré est nul, d'où $\exp([M,N]) = I_3+[M,N] = I_3+(pq'-qp')M_{0,0,1}$.
   $\exp M \exp N = M_{p+p',q+q',a}$ avec $a = \frac{1}{2}(pq+p'q')+pq'+r+r'$, et de même $\exp(-M)\exp(-N) = M_{-p-p',-q-q',b}$ avec $b = \frac{1}{2}(pq+p'q')+pq'-r-r'$.
   D'après les calculs initiaux, $\exp M \exp N \exp(-M)\exp(-N) = I_3+(a+b+(p+p')(-q-q'))M_{0,0,1} = I_3+(\frac{1}{2}(pq+p'q')+pq'+r+r'+\frac{1}{2}(pq+p'q')+pq'-r-r'+(p+p')(-q-q'))M_{0,0,1} = I_3+(pq'-qp')M_{0,0,1}$, d'où $\exp M \exp N \exp(-M)\exp(-N) = \exp([M,N])$.

5. I_3+M est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux 1, donc $\det(I_3+M) = 1$, d'où $H \subset SL_3(\mathbb{R})$.
   $(I_3+M)(I_3+N) = I_3+M_{p+p',q+q',pq'+r+r'}$, qui appartient à H.
   $(I_3+M)^{-1} = I_3+M_{-p,-q,pq-r} \in H$, et $I \in H$, donc H est un sous-groupe de $SL_3(\mathbb{R})$.
   Pour tout $M \in L$, $\exp M \in H$. D'après la question 3, exp est un morphisme de groupes de $(L,*)$ dans $(H,\times)$.
   D'après 1, $\exp M = I_3$ implique $p = q = r = 0$, d'où $M = 0$.
   Enfin, $\exp M_{p,q,r-\frac{1}{2}pq} = I+M_{p,q,r}$, donc on a un isomorphisme.

Deuxième partie

On rappelle pour cette partie que pour toute matrice M, $\exp M$ est inversible, d'inverse $\exp(-M)$.

6. (a) On montre d'abord par récurrence sur $k \geqslant 1$ que $AB^k - B^kA = kB^{k-1}[A,B]$.
   C'est vrai pour $k=1$.
   Supposons le vrai au rang k. Alors $AB^{k+1} - B^{k+1}A = (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA) = kB^{k-1}[A,B]B + B^k[A,B] = (k+1)B^k[A,B]$ car $[A,B]$ commute avec B.
   Le lemme annoncé est démontré.
   Il en résulte que pour $k \geqslant 1$, $A\dfrac{B^k}{k!} - \dfrac{B^k}{k!}A = \dfrac{B^{k-1}}{(k-1)!}[A,B]$. On somme de $k=1$ à $+\infty$. En utilisant que $AI_d - I_dA = 0$, on obtient $[A, \exp(B)] = \exp(B)[A,B]$.

   (b) On rappelle que $(\exp(tA))' = A\exp(tA) = \exp(tA)A$.
   Posons $\varphi(t) = \exp(tA)\exp(tB)$. Alors $\varphi'(t) = \exp(tA)(A\exp(tB) + \exp(tB)B)$.
   En appliquant 6a à tA et tB (qui commutent avec $[tA, tB]$), on obtient en simplifiant par t que $A\exp(tB) - \exp(tB)A = \exp(tB)tAB$.
   D'où $\varphi'(t) = \exp(tA)\exp(tB)(A + B + t[A,B]) = \varphi(t)(A + B + t[A,B])$.

   (c) On pose $\psi(t) = \varphi(t)\exp(-t(A+B) - \frac{t^2}{2}[A,B])$.
   Alors $\psi'(t) = (\varphi'(t) - \varphi(t)(A + B + t[A,B]))\exp(-t(A+B) - \frac{t^2}{2}[A,B]) = 0$. Par suite, ψ est constante. Or $\psi(1) = \exp(A)\exp(B)\exp(-((A + B + \frac{1}{2}[A,B])))$ et $\psi(0) = I_d$, d'où $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B + \frac{1}{2}[A,B]))$.

7. (a) Posons $M = pA + qB + r[A,B]$ et $N = p'A + q'B + r'[A,B]$. Les matrices A, B et $[A,B]$ commutent avec $[A,B]$ donc par linéarité, M et N commutent avec $[A,B]$.
   Le crochet est distributif, antisymétrique ($[A,B] = -[B,A]$, d'où $[A,A] = 0$) et $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ par hypothèse, donc $[M,N] = (pq' - qp')[A,B]$, ce qui entraine que M et N commutent avec $[M,N]$.

   (b) G est inclus dans $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. $I = \exp 0 \in G$.
   Soient M et N dans $\mathcal{L}$. $[M,N]$ commute avec M et N, donc d'après 6a, $\exp(M)\exp(N) = \exp(P)$ avec $P = M + N + \frac{1}{2}[M,N]$ qui appartient à $\mathcal{L}$, donc $\exp(M)\exp(N) \in G$.
   Enfin, $-M \in \mathcal{L}$ et $\exp(M)^{-1} = \exp(-M) \in G$. Donc G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (*) $M_{p,q,r}\,M_{p',q',r'} = M_{p+p',q+q',r+r'+\frac{1}{2}(pq'-qp')}$.
   En appliquant la formule du 6c à $M = pA + qB + r[A,B]$ et $N = p'A + q'B + r'[A,B]$ qui commutent avec $[M,N]$ d'après 7a, on obtient $\exp(M)\exp(N) = \exp(M + N + \frac{1}{2}[M,N]) = \exp((p+p')A + (q+q')B + (r + r' + \frac{1}{2}(pq' - qp')[A,B])$.
   En comparant avec (*), on en déduit que $\Phi(\exp(M_{p,q,r}\,M_{p',q',r'})) = \Phi(\exp(M_{p,q,r}))\Phi(\exp(M_{p',q',r'}))$, donc Φ est un morphisme de groupes.

8. (a) $\dfrac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
   $\dfrac{n!}{(n-k)!\,n^k} = (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\cdots(1 - \frac{k-1}{n})$ appartient à $[0,1]$ d'où $0 \leqslant 1 - \dfrac{n!}{(n-k)!\,n^k} \leqslant 1$.
   On pose $\varepsilon_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k - \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n$. D'après ce qui précède, $\varepsilon_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right)D_n^k$
   d'où $\left\|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k - \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n\right\| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\right)\lambda^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} - \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$ en remontant le calcul dans l'autre sens. On sait que $n\ln(1 + \frac{\lambda}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$ donc par continuité de l'exponentielle, $\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^\lambda$, donc ε_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

   (b) On prouve l'inégalité par récurrence sur k.
   Elle est vérifiée pour $k=1$. Supposons la vraie au rang k.
   Alors $D_n^{k+1} - D^{k+1} = D_n(D_n^k - D^k) + (D_n - D)D^k$. Comme la norme est sous-multiplicative, on en déduit en utilisant l'hypothèse de récurrence que :

$$\|D_n^{k+1}-D^{k+1}\|\leqslant \|D_n\|\,\|D_n^k-D^k\|+\|D_n-D\|\,\|D\|^k\leqslant \lambda\, k\lambda^{k-1}\|D_n-D\|+\lambda^k\|D_n-D\|\,.$$

D'où finalement $\|D_n^{k+1}-D^{k+1}\|\leqslant (k+1)\lambda^k\|D_n-D\|$.

(c) $\exp(D)-\left(I_d+\dfrac{D_n}{n}\right)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k-D_n^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{D_n^k}{k!}-\left(I_d+\frac{D_n}{n}\right)^n+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{D_n^k}{k!}$ d'où

$$\|\exp(D)-\left(I_d+\frac{D_n}{n}\right)^n\|\leqslant\|\varepsilon_n\|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}}{k!}\|D_n-D\|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\|\varepsilon_n\|+e^{\lambda}\|D_n-D\|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

9. (a) $\|\exp(D)-I_d-D\|=\|\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{D^n}{n!}\|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\|D\|^n}{n!}\leqslant\|D\|^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}=(e-2)\|D\|^2$, d'où le résultat avec $\mu=e-2$.

(b) On pose $\exp(A)=I_d+\dfrac{A}{n}+A_n$ et $\exp(B)=I_d+\dfrac{B}{n}+B_n$. Soit n_0 le premier entier naturel supérieur ou égal à $\|A\|$ et $\|B\|$. Alors pour tout $n\geqslant n_0$, on a d'après 9a que $\|A_n\|\leqslant\mu\dfrac{\|A\|^2}{n^2}$ et $\|B_n\|\leqslant\mu\dfrac{\|B\|^2}{n^2}$. On en déduit :

$$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)=I_d+\frac{A+B}{n}+C_n \text{ avec } C_n=A_n+B_n+\frac{AB}{n^2}+\frac{A_nB}{n}+\frac{AB_n}{n}+\frac{A_nB_n}{n^2}.$$

D'après a, pour tout $n\geqslant n_0$, on obtient $\|C_n\|\leqslant\dfrac{\nu_0}{n^2}$ où on a posé par exemple $\nu_0=\|AB\|+\mu\left(\|A\|^2+\|B\|^2+\|A\|^2\|B\|+\|A\|\|B\|^2+\mu\|A\|^2\|B\|^2\right)$.
En prenant $\nu_1=\max_{1\leqslant n<n_0}(n^2\|\exp(\frac{A}{n})\exp(\frac{B}{n})-I_d-\frac{A}{n}-\frac{B}{n}\|)$ et $\nu=\max(\nu_0,\nu_1)$, on obtient finalement l'égalité voulue avec $\|C_n\|\leqslant\dfrac{\nu}{n^2}$ pour tout $n\geqslant 1$.

10. On applique 8c avec $D_n=A+B+nC_n$ qui converge vers $A+B$ d'après 9b :
$\left(\exp\left(\dfrac{A}{n}\right)\exp\left(\dfrac{B}{n}\right)\right)^n=\left(I_d+\dfrac{D_n}{n}\right)^n$ converge vers $\exp(A+B)$ quand $n\to+\infty$.

Troisième partie

11. (a) L'équation différentielle ED proposée est linéaire à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à coefficients continus sur $[0,T]$, donc en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, le problème de Cauchy proposé par ED et $\gamma(0)=I_3$ admet une unique solution sur $[0,T]$.

(b) On pose $\gamma(t)=(a_{ij}(t))_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. En explicitant ED, on arrive à :
$\begin{pmatrix}a'_{11}&a'_{12}&a'_{13}\\a'_{21}&a'_{22}&a'_{23}\\a'_{31}&a'_{32}&a'_{33}\end{pmatrix}=u(t)\begin{pmatrix}0&a_{11}&0\\0&a_{21}&0\\0&a_{31}&0\end{pmatrix}+v(t)\begin{pmatrix}0&0&a_{12}\\0&0&a_{22}\\0&0&a_{32}\end{pmatrix}$.
En particulier, $a'_{11}=0$ et $a_{11}(0)=1$, donc $a_{11}=1$. $a'_{21}=a'_{31}=0$ et $a_{21}(0)=a_{31}(0)=0$, donc $a_{21}=a_{31}=0$. Ensuite, $a'_{22}=0$ et $a_{22}(0)=1$, d'où $a_{22}=1$. $a'_{32}=0$ et $a_{32}(0)=0$ donc $a_{32}=0$ et $a'_{33}=0$ et $a_{33}(0)=1$, d'où $a_{33}=1$. Il en résulte que $\gamma(t)\in H$ pour tout $t\in[0,T]$.
On peut donc écrire $\gamma(t)=\exp(M_{p(t),q(t),r(t)})=\begin{pmatrix}1&p(t)&\frac12 p(t)q(t)+r(t)\\0&1&q(t)\\0&0&1\end{pmatrix}$.
On en tire $p'=u$, $q'=v$ et $r'=pv-\frac12(p'q+pq')$, d'où avec les conditions initiales :
$p(t)=\displaystyle\int_0^t u(s)\,ds$, $q(t)=\displaystyle\int_0^t v(s)\,ds$ et $r(t)=\dfrac12\displaystyle\int_0^t v(s)(\int_0^s u(y)\,dy)\,ds-\frac12\int_0^t u(s)(\int_0^s v(y)\,dy)\,ds.$

12. (a) $p(t)=\displaystyle\int_0^t \sin(\theta-\varphi s)\,ds=\frac{\cos(\theta-t\varphi)-\cos\theta}{\varphi}$. $q(t)=\displaystyle\int_0^t \cos(\theta-\varphi s)\,ds=\frac{\sin\theta-\sin(\theta-t\varphi)}{\varphi}$.

On pose $R: t\mapsto \dfrac{t\varphi-\sin(t\varphi)}{2\varphi^2}$ avec $R(0)=0$. Alors R est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $R'(t)=\dfrac{1-\cos(t\varphi)}{2\varphi}$.

$\dfrac{1}{2}v(t)p(t)-\dfrac{1}{2}u(t)q(t)=\cos(\theta-t\varphi)\dfrac{\cos(\theta-t\varphi)}{2\varphi}-\sin(\theta-t\varphi)\dfrac{\sin\theta-\sin(\theta-t\varphi)}{\varphi}=R'(t)$, d'où par les formules du 11b, $r(t)=R(t)$.

(b) Dans cette question, $\varphi=0$. En reprenant les formules du 11b, on obtient $p(t)=t\sin\theta$, $q(t)=t\cos\theta$, $r(t)=0$, c'est-à-dire $\gamma_{\theta,0}(t)=\begin{pmatrix}1 & t\sin\theta & \frac{1}{2}t^2\sin\theta\cos\theta\\ 0 & 1 & t\cos\theta\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

13. Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{s\to 0} f(s)=1$, $\lim_{s\to 0} g(s)=0$ (en fait f et g ainsi prolongées sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}^\infty$).

$f'(s)=\frac{2}{s^3}\varphi(s)$ avec $\varphi(s)=s\sin s+2\cos s-2$. $\varphi'(s)=-\sin s+s\cos s$, $\varphi''(s)=-s\sin s$. $\varphi''<0$ sur $]0,\pi[$ et $\varphi''>0$ sur $\pi,2\pi]$, donc φ' décroit sur $[0,\pi]$ et croit sur $[\pi,2\pi]$, strictement. Comme $\varphi'(0)=\varphi'(2\pi)=0$, $\varphi'<0$ sur $]0,2\pi[$, donc φ décroit strictement et $\varphi(0)=0$ donc $f'<0$ sur $]0,2\pi[$, donc f est un homéomorphisme décroissant de $[0,2\pi]$ sur $[0,1]$.

$g'(s)=\dfrac{1}{2s^3}(-s(1+\cos s)+2\sin s)=-\dfrac{2\cos\frac{s}{2}}{s^3}\varphi'(\frac{s}{2})$ qui est du signe de $\cos\dfrac{s}{2}$, donc g croit sur $[0,\pi]$ et décroit sur $[\pi,2\pi]$ donc atteint son maximum en π, avec $g(0)=0$, $g(\pi)=\frac{1}{2\pi}$ et $g(2\pi)=\frac{1}{4\pi}$.

14. On part de $\gamma_{\theta,\varphi}(1)=\exp(M_{p,q,r})$.

Si $\varphi=0$, d'après 12b, $p^2+q^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ et $r=0=g(0)=(g\circ f^{-1})(1)$.

Supposons $\varphi\neq 0$. $p^2+q^2=\left(\dfrac{\cos(\theta-\varphi)-\cos\theta}{\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\theta-\sin(\theta-\varphi)}{\varphi}\right)^2=\dfrac{2-2\cos\varphi}{\varphi^2}=f(\varphi)$, d'où $(g\circ f^{-1})(p^2+q^2)=g(\varphi)=r$ d'après 12a.

<u>Enoncé de la réciproque : Soit $(p,q)\in\mathbb{R}^2$ tel que $p^2+q^2=1$. Soit $r=(g\circ f^{-1})(p^2+q^2)$. Alors $r\geqslant 0$ et $(p,q,r)\in B(1)$.</u>

<u>Preuve</u> :

– Si $p^2+q^2=1$, alors $\exists\,\theta\in[-\pi,\pi]$, $p=\cos\theta$ et $q=\sin\theta$, d'où $\gamma_{\theta,0}(1)=\exp(M_{p,q,0})$ d'où $(p,q,0)\in B(1)$.

– Si $p^2+q^2<1$, posons $\varphi=f^{-1}(p^2+q^2)$, de sorte que $r=g(\varphi)$, soit $\left(\dfrac{p\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2+\left(\dfrac{q\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^2=1$. Il existe donc $\theta\in[-\pi,\pi]$ tel que $p\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin(\theta-\frac{\varphi}{2})$ et $q\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos(\theta-\frac{\varphi}{2})$, c'est-à-dire $p=\dfrac{\cos(\theta-\varphi)-\cos\theta}{\varphi}$ et $q=\dfrac{\sin\theta-\sin(\theta-\varphi)}{\varphi}$. Avec les formules du 12a, on en déduit que $(p,q,r)\in B(1)$.

15. En reprenant 12a, on remarque que $r(1)>0$ pour $\varphi\in]0,2\pi[$ et $r(1)$ est impair par rapport à φ.

Si $\exp(M_{p,q,r})=\gamma_{\theta,\varphi}(1)$, alors les formules du 12a donnent que $\exp(M_{-p,q,-r})=\gamma_{-\theta,-\varphi}(1)$, donc pour encadrer $p^2+q^2+|r|$ dans $B(1)$, on peut se limiter à $r\geqslant 0$. Dans ce cas, $p^2+q^2+r=x+(g\circ f^{-1})(x)$ avec $x=p^2+q^2$ décrivant $[0,1]$.

Les fonctions id et $g\circ f^{-1}$ sont continues positives sur le compact $[0,1]$, et s'annulent respectivement uniquement en 0 et 1. On en déduit que leur somme ne s'annule pas, donc atteint sa borne inférieure $m>0$ et sa borne supérieure M, d'où l'encadrement $c_1^{-1}\leqslant p^2+q^2+|r|\leqslant c_1$, avec $c_1=\max(m^{-1},M)$.

16. (a) – <u>Supposons $p=q=0$.</u>

Si $r>0$, d'après 14, $(0,0,\lambda^2 r)\in B(1)\iff \lambda^2 r=(g\circ f^{-1})(0)$. Or $(g\circ f^{-1})(0)=\dfrac{1}{4\pi}$ donc la seule valeur de λ solution est $\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$.

Si $r<0$, $(0,0,-\dfrac{1}{4\pi}r)\in B(1)$ d'après la remarque du 15.

– <u>Supposons $(p,q)\neq(0,0)$.</u>

D'après la remarque du 15, $(\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r) \in B(1)$ si et seulement si $(-\lambda p, \lambda q, -\lambda^2 r) \in B(1)$, donc on peut se limiter à $r \geqslant 0$.
D'après 14, $(\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r) \in B(1) \iff \lambda^2(p^2+q^2) \leqslant 1$ et $\lambda^2 r = (g \circ f^{-1})(\lambda^2 p^2 + \lambda^2 q^2)$.
On pose $h :]0,1] \to \mathbb{R}^+,\ s \mapsto \dfrac{(g \circ f^{-1})(s^2)}{s^2}$. La fonction h est continue sur $]0,1]$, $h(1) = 0$ et $\lim_{s\to 0} h(s) = +\infty$.
En posant $s = \lambda\sqrt{p^2+q^2}$, la condition se traduit par $h(s) = \dfrac{r}{p^2+q^2}$. Il s'agit donc de montrer que h est bijective de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}^+$.
Pour $s \in]0,1]$, posons $x = f^{-1}(s^2)$. On a $s^2 = f(x) = \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}$.
Par suite, $h(s) = \dfrac{x^2 g(x)}{1-\cos x} = \dfrac{x - \sin x}{4(1-\cos x)} = \dfrac{u(x)}{4u'(x)}$ avec $u(x) = x - \sin x$. Posons $H = \dfrac{u}{4u'}$.
On a $H' = \dfrac{N}{4u'^2}$ avec $N = u'^2 - uu''$. Après calcul, $N(x) = 2 - 2\cos x - x\sin x$, $N'(x) = \sin x - x\cos x$, $N''(x) = x\sin x$ qui est positif sur $[0,\pi]$ et négatif sur $[\pi, 2\pi]$, donc N' croit sur $[0,\pi]$ et décroit sur $[\pi, 2\pi]$. Or $N'(0) = 0$ et $N'(2\pi) = -2\pi$ donc N' s'annule en un certain α entre π et 2π, et N croit sur $[0,\alpha]$ et décroit sur $[\alpha, 2\pi]$, strictement, et $N(0) = N(2\pi) = 0$ donc N est strictement positive sur $]0,2\pi[$. Comme f^{-1} décroit, h est strictement décroissante donc bijective de $]0,1]$ sur $\mathbb{R}^+$.
On conclut à l'existence et l'unicité de λ dont la valeur est $\dfrac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}\, h^{-1}\left(\dfrac{r}{p^2+q^2}\right)$.

(b) Soit $A \in H$, il existe $(p,q,r) \in \mathbb{R}^3$ unique tel que $A = \exp(M_{p,q,r})$.
D'après a, il existe θ_0, φ_0 et $\lambda > 0$ tels que $\gamma_{\theta_0,\varphi_0}(1) = \exp(M_{\lambda p, \lambda q, \lambda^2 r})$, ce qui s'écrit :

$$\lambda p = \frac{\cos(\theta_0 - \varphi_0) - \cos\theta_0}{\varphi_0},\ \lambda q = \frac{\sin\theta_0 - \sin(\theta_0 - \varphi_0)}{\varphi_0},\ \lambda^2 r = \frac{\varphi_0 - \sin(\varphi_0)}{2\varphi_0^2}.$$

Il suffit alors de poser $T(A) = \lambda^{-1}$, $\varphi = \lambda\varphi_0$ et $\theta = \theta_0$ pour avoir grâce aux formules du 12 :
$\gamma_{\theta,\varphi}(T(A)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos(\theta - T\varphi) - \cos\theta}{\varphi} & \frac{T\varphi - \sin(T\varphi)}{2\varphi^2} \\ 0 & 1 & \frac{\sin\theta - \sin(\theta - T\varphi)}{\varphi} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos(\theta_0 - \varphi_0) - \cos\theta_0}{\lambda\varphi_0} & \frac{\varphi_0 - \sin(\varphi_0)}{2\lambda^2\varphi_0^2} \\ 0 & 1 & \frac{\sin\theta_0 - \sin(\theta_0 - \varphi_0)}{\lambda\varphi_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & p & \frac{1}{2}pq + r \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$

(c) On applique la question 15 au triplet de la question 16a : $c_1^{-1} \leqslant \lambda^2(p^2+q^2+|r|) \leqslant c_1$, or $T(\exp(M_{p,q,r})) = \lambda^{-1}$, d'où $c_1^{-1/2}\sqrt{p^2+q^2+|r|} \leqslant T(\exp(M_{p,q,r})) \leqslant c_1^{1/2}\sqrt{p^2+q^2+|r|}$, d'où le résultat demandé avec $c_2 = \sqrt{c_1}$.